

Analyse der Faltenbildung in Membranen aus unterschiedlichen Materialien

von
Dipl.-Ing. Jörg Hornig

Von der Fakultät V
Verkehrs- und Maschinensysteme
der Technischen Universität Berlin
zur Verleihung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte Dissertation

Berlin 2004
D 83

Promotionsausschuß:

Vorsitzender:	Professor Dr.-Ing. G. Brunk
Berichter:	Professor Dr.-Ing. H. Schoop
	Professor Dr.-Ing. J. Thorbeck

Tag der Einreichung:	03. 11. 2003
Tag der wissenschaftlichen Aussprache:	30. 01. 2004

Vorwort

Diese Arbeit entstand in der Zeit von Dezember 1998 bis November 2003 während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik der TU Berlin.

Herrn Prof. Schoop gilt für seine Unterstützung und Förderung meiner Arbeit sowie für die angenehme Zusammenarbeit mein herzlicher Dank. Durch die Weitergabe seiner reichhaltigen Erfahrung hat er entscheidenden Einfluß auf die Entwicklung dieser Arbeit genommen.

Herrn Professor Thorbeck danke ich für die Übernahme des zweiten Berichtes und für die wertvolle Anregung zum experimentellen Teil dieser Arbeit, der zweifellos eine große Bereicherung ist.

Prof. Brunk war stets zum fachlichen und persönlichen Gespräch bereit. Hierfür und für die Übernahme des Vorsitz im Promotionsausschuß danke ich ihm vielmals.

Für die angenehme Atmosphäre am Institut für Mechanik bedanke ich mich bei allen Kollegen. Besonders meinem Freund und Kollegen Thomas Wenzel gebührt für die zahlreichen Besprechungen und intensiven Diskussionen sowie für das prima Klima in unserem Büro mein herzlicher Dank. Uwe Herbrich hat mit seiner Studienarbeit zur thermischen Faltung den Fortgang dieser Arbeit unterstützt. Johannes Thaten und Roland Koll standen mir bei der Durchführung der Experimente mit Rat und Tat zur Seite. Ihnen danke ich sehr für ihr Engagement und ihre kompetente Unterstützung.

Zusammenfassung

Am Institut für Mechanik der TU Berlin werden seit vielen Jahren Verfahren für die Analyse des strukturellen Verhaltens von Flächentragwerken entwickelt. Die numerische Simulation von Membranstrukturen, insbesondere von Segelkonstruktionen, war hierbei ein Schwerpunkt der Forschung. An diese Forschungen möchte die vorliegende Arbeit anknüpfen.

Die numerische Simulation des Tragverhaltens einer Membran bei Berücksichtigung des Faltungsphänomens ist das Thema dieser Arbeit. Es werden Berechnungsmethoden vorgestellt, die in der Lage sind, geometrische Nichtlinearitäten, inelastische Effekte sowie thermische Einflüsse zu berücksichtigen.

Als Ausgangspunkt dient hierbei die von Roddeman eingeführte Korrektur der Membrankinematik. In Kapitel 3 wird eine referenzbezogene Problemformulierung angegeben.

Kapitel 4 behandelt die Membranfaltung im Falle einer linearen Spannungs-Dehnungs-Beziehung. Analytische Betrachtungen werden durchgeführt.

Die Analyse inelastischer Effekte und deren Auswirkungen auf das Tragverhalten einer gefalteten Membran ist Gegenstand des Kapitels 5. Auf Grundlage der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten wird eine Neuformulierung des Faltenkriteriums vorgenommen. Im Falle eines inelastischen Materialverhaltens wird besonderes Augenmerk auf die Ermittlung geeigneter Startwerte für den Faltenalgorithmus gelegt.

Von der Faltungsanalyse inelastischer Membranen ausgehend wird der Algorithmus derart erweitert, daß eine Berücksichtigung von Temperaturdehnungen möglich ist.

Die hier entwickelten Methoden werden in einem FE-Programm eingesetzt. In numerischen Strukturanalysen und im Experiment werden die Anwendbarkeit der vorgestellten Verfahren und die Grenzen der Faltentheorie gezeigt.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Zum Stand der Entwicklung	2
1.2	Über diese Arbeit	3
2	Numerische Behandlung der Membran	5
2.1	Greensche Verzerrungen im finiten Element	7
2.2	Knotenkräfte und Steifigkeitsmatrix	10
3	Faltentheorie	13
3.1	Faltenkriterium	14
3.2	Homogene Membranfaltung nach Roddeman	16
3.2.1	Faltenkinematik	16
3.2.2	Faltenbedingung	18
3.3	Transformation der Faltenkinematik	19
3.4	Transformation der Faltenbedingungen	22
3.5	Numerische Lösung der Faltenbedingungen	24
3.6	Konsistente Linearisierung	25
3.7	Beispiel: Einfache Scherung	27
3.7.1	Einfache Scherung bei linearem, orthotropem Material	27
3.7.2	Einfache Scherung bei nichtlinearem, orthotropem Material	30
3.8	Faltenalgorithmus mit 3D-Materialgesetz	31
4	Faltung bei linearem Materialverhalten	35
4.1	Die Faltungsrichtung α	36
4.2	Das Faltungsmaß β	37
4.3	Analytische Lösungen der Faltenbedingung	38
4.3.1	Sonderfälle verschwindender Koeffizienten k_0 bzw. k_4	38
4.3.2	Isotrope Membran	38
4.3.3	Orthotrope Membran	39
5	Faltung bei inelastischem Materialverhalten	47
5.1	Plastische Deformation einer Membran	47
5.2	Faltenkriterium bei plastischen Deformationen	48

5.3	Faltenbedingung	50
5.4	Beispiel: Einfache Scherung	50
5.5	Wie findet man gute Startwerte?	52
5.5.1	Transformation der Faltenkinematik in die Zwischenkonfiguration	53
5.5.2	Transformation der Faltenbedingung in die Zwischenkonfiguration	54
6	Thermische Faltung	57
6.1	Thermische Dehnungen	57
6.2	Membrankräfte	58
6.3	Faltenkriterium und Faltenalgorithmus	59
6.4	Beispiel: Einfache Scherung	59
7	Strukturanalysen	63
7.1	Airbag	64
7.2	Luftschiff	69
7.3	Sonnensegel	73
7.4	Verdrillung einer Kreisringmembran	77
8	Schlußbemerkungen	87
9	Anhang	89
9.1	Vektor- und Tensoralgebra	89
9.2	Differentialgeometrie	90
9.3	Beschreibung des Deformationszustandes	92
9.4	Membrankräfte	94
9.5	Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen	96
9.6	Materialgesetze	98
9.6.1	Linear-elastisches Materialverhalten	98
9.6.2	Ein orthotropes, nichtlinear elastisches Material	100
9.6.3	Elastisch-plastisches Materialverhalten	101
10	Symbolverzeichnis	107
10.1	Lateinische Symbole	107
10.2	Griechische Symbole	109
	Literaturverzeichnis	111

Kapitel 1

Einleitung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Analyse von geometrisch und physikalisch nichtlinearen Membranen unter Berücksichtigung der Membranfaltung.

Aus den vielfältigen Anwendungen von Membranen resultieren verschiedene Bedeutungen des Begriffs Membran. So wird die Bezeichnung Membran in vielen Zusammenhängen, z.B. in der Biologie, der Chemie und der Mechanik verwendet. In dieser Arbeit ist unter einer Membran ein strukturmechanisches, idealisiertes Schalenmodell zu verstehen. In diesem idealisierten Schalenmodell dominieren planare Effekte. Biegeeffekte werden wegen der Dünnwandigkeit vernachlässigt.

Unter Membranfaltung soll in dieser Arbeit das bei Druckbeanspruchungen auftretende Ausweichen der Membran in eine andere Gleichgewichtslage verstanden werden. Dieses Instabilitätsphänomen wird Rahmen der Schalentheorie als “Beulen” bezeichnet. Bei einer Membran kann dieser Instabilitätseffekt dadurch berücksichtigt werden, daß man nur Zugspannungen zuläßt (Zugfeldtheorie). Damit ist es möglich, das Tragverhalten der Membranstruktur mit Faltungseinfluß zu beschreiben.

Membranen verfügen häufig über eine große Tragfähigkeit bei geringer Masse. Das gibt ihnen die Fähigkeit, große Flächen zu überspannen. In der Architektur bzw. im Bauwesen werden vorgespannte Membranen bei Zeltdachkonstruktionen oder bei Traglufthallen verwendet. Bei Architekten erfreuen sich Membrankonstruktionen aus gewissen ästhetischen Gründen einiger Beliebtheit. In [26] zeigt F. Otto Beispiele für solche Konstruktionen. Durch ihre hohe Tragfähigkeit bei gleichzeitig geringem Gewicht sind Membranen sehr gut für Leichtbaukonstruktionen geeignet. Beispiele für große Leichtbaukonstruktionen sind die wieder in Mode kommenden Luftschiffe, wie der Zeppelin NT oder der Entwurf des Cargolifter CL 160, die eine Membranhülle als tragende Struktur nutzen. Ballons, Ultraleichtflugzeuge und Drachenflieger sind weitere Beispiele für im Leichtbau verwendete Membranen. Membranen sind wegen der geringen Biegesteifigkeit sehr flexibel. Durch diese Flexibilität können Membrankonstruktionen leicht an unterschiedliche Bedingungen oder Arbeitszustände angepaßt werden, wie das z.B. bei der Steuerung von Paragliden oder beim Trimmen von Segeln der Fall ist. Da Membranen sehr flexibel sind, können sie auf kleinem Raum verstaut und bei Bedarf entfaltet werden. Die populärste Membranstruktur, die

von dieser Eigenschaft Gebrauch macht, dürfte der Airbag sein. Desweiteren kommen Membranen in der Raumfahrt zum Einsatz. So wurden bei der Landung der Marssonde Pathfinder Airbags verwendet, um einen Teil des Landestoß aufzunehmen. Ein anderes Beispiel ist das solar sail project des DLR, welches das Antriebskonzept für Satelliten mittels Sonnensegel bei Ausnutzung des sogenannten Sonnenwindes erprobt. Neben diesen Anwendungen kann die Membrantheorie unter Umständen zur Simulation von Umformprozessen dünner Bleche verwendet werden. Weitere Anwendungsgebiete der Membrantheorie sind die Medizintechnik und die Biomechanik.

1.1 Zum Stand der Entwicklung

Wegen der zahlreichen Anwendungen ist das Interesse an Berechnungsverfahren für Membranstrukturen sehr groß. In der Vergangenheit wurden Verfahren zur Analyse komplexer Membranstrukturen entwickelt. Dabei nimmt die finite Elemente Methode (siehe [2], [44], [48]) einen zentralen Platz ein. Aber auch mit anderen numerischen Methoden wie der Randelemente-Methode, (siehe z.B. [15]) können Membranen erfolgreich analysiert werden. Für den Zeitraum bis 1996 gibt Jenkins in [14] einen Überblick über den Stand der Technik bei der Analyse statisch und dynamisch belasteter, nichtlinearer Membranen.

Bei der strukturmekanischen Betrachtung von Membranen muß dem Phänomen der Membranfaltung Aufmerksamkeit geschenkt werden. Membranen sind sehr effektiv bei Zugbeanspruchung, können jedoch wegen der sehr geringen Biegesteifigkeit kaum Druckbeanspruchung ertragen. In der Vergangenheit war die Membranfaltung Gegenstand einer Vielzahl von Untersuchungen. Wagner [42] und Reissner [29] führten die Idee eines Zugfeldes ein. In den darauf folgenden Jahren analysierten zahlreiche Autoren das Faltungsphänomen. Dabei wurden im Prinzip drei Wege beschritten. Als erstes ist die naheliegende Idee zu nennen, das Materialgesetz zu modifizieren. Dieses Konzept ist jedoch in der Regel auf isotrope, linear elastische Membranen beschränkt. Zum zweiten gibt es Methoden, die auf Betrachtungen der Formänderungsenergie basieren. Als dritte Herangehensweise ist die Modifizierung der Membrankinematik zu nennen.

Modifizierung des Materialgesetzes: Die ersten Analysen von Membranen mit Faltung beschränkten sich auf linear elastisches Materialverhalten und geometrisch lineare Fälle. Den Arbeiten von Wagner [42] und Reissner [29] aus den Jahren 1929 bzw. 1938 folgte unter anderem 1961 eine Arbeit von Stein & Hedgepeth. Auf dieser Theorie bauten Miller & Hedgepeth [23] sowie Miller, Hedgepeth, Weingarten, Das & Kahay [24] auf. Die Faltung wird hier durch eine Modifikation des Materialgesetzes berücksichtigt. Oelbermann analysierte 1982 in [25] die Faltung plastisch deformierter Membranen durch einen ingenieurmäßigen Eingriff in das plastische Materialgesetz. Er wendete dieses Verfahren auf Formgebungsprozesse z.B. für Parabolspiegel großer Antennen an. Contri & Schrefler stellen 1988 in [9] einen geometrisch nichtlinearen

Faltenalgorithmus für ein Material ohne Druckspannungen (no-compression material model) vor. Stanuszek nutzt in [38] zur Simulation der Faltung die Seilanalgie und wertet die Längung oder Stauchung der Seiten des finiten Elementes aus.

Energetische Lösungsansätze: Mansfield formulierte 1970 in [22] eine geometrisch lineare Theorie zur Bestimmung des Zugfeldes in Membranen. Das Zugfeld wird aus der Forderung bestimmt, daß die Verzerrungsenergie einen Extremwert annimmt. 1986 zeigte Pipkin in [27], daß die Zugfeldtheorie durch eine Modifikation der Verzerrungsenergiedichte in die herkömmlichen Membrantheorie eingeordnet werden kann. Diese modifizierte Verzerrungsenergiedichte (relaxed energy density) stellt sicher, daß in der Membran keine Druckspannungen auftreten. Die von Pipkin eingeführte Idee einer modifizierten Verzerrungsenergiedichte wurde 2001 von Epstein & Forcinito [10] aufgegriffen. Ziegler, Wagner & Bletzinger stellten in [46] bzw. [47] einen auf energetischen Betrachtungen basierenden Faltenalgorithmus vor, der analog zu Lösungsverfahren plastischer Materialgesetze funktioniert.

Kinematische Lösungsansätze: Eine Manipulation der Membrankinematik zur Erzeugung eines einachsigen Membrankraftzustandes wird erstmals von Wu [45] eingeführt. Roddeman entwickelte 1987 in [30] eine Faltentheorie, in der die Faltung durch eine Korrektur des Deformationsgradienten berücksichtigt wird. Diese Theorie kommt ohne Annahmen zum Materialverhalten aus und ist somit weitgehend anwendbar. In der Folgezeit sind auf Grundlage der Roddemanschen Theorie weitere Arbeiten erschienen. Taenzer [39] wendete bei der Simulation von Segeln das Roddemansche Verfahren auf die Schnittmuster methode von Schoop [33] an. Seokwoo & Seyoung [37], Lu, Accorsi & Leonard (2001 [18]) und Schoop, Taenzer & Hornig [34], [35] geben jeweils referenzbezogene Formulierungen eines Faltenalgorithmus auf Grundlage der Roddemanschen Theorie an. Ebenfalls auf einem kinematischen Ansatz basiert die Arbeit von Wiedemann [43]. Chiu, Benson, Fiscella & Burns stellten 1994 in [8] auf Grundlage der Roddemanschen Theorie ein Verfahren vor, daß Temperatureinflüsse auf die Faltung von Polymermembranen berücksichtigt.

Allen diesen Theorien ist gemein, daß sie das Tragverhalten der Membran bei Faltung bestimmen können. Die gefaltete Lage selbst bleibt unbestimmt, während die mittlere Lage ermittelt werden kann. Um eine Abschätzung der gefalteten Lage zu geben, führen Liu, Jenkins & Schur [17] nach der Ermittlung des Membrankraftzustandes lokal eine Analyse zur Bestimmung der Wellenlänge und Amplitude der Falten durch, bei der die Biegeeigenschaften in Rechnung gestellt werden.

1.2 Über diese Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist es, Algorithmen zur Analyse der Faltung bei geometrisch und physikalisch nichtlinearen Membranen zu entwickeln und anzuwenden. Grundlage

hierfür ist die Faltentheorie nach Roddeman aus [30] und [31] in der referenzbezogenen Darstellung von Schoop, Taenzer & Hornig [35]. Die neu entwickelten Algorithmen sollen Effekte wie Plastizität und Thermoelastizität berücksichtigen können. Für linear elastisches Materialverhalten wird das Faltungsproblem analytisch betrachtet. Die Betrachtungen in dieser Arbeit beschränken sich auf die Membranstatik.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

Kapitel 2 befaßt sich mit der Lösung von strukturmechanischen Problemen, insbesondere bei Membranen. Die Methode der finiten Elemente (FEM) ist das in dieser Arbeit verwendete numerische Verfahren, mit welchem die Randwertprobleme der Membranstatik gelöst werden. Kapitel 2 gibt einen kurzen Überblick über die hier verwendeten finiten Elemente.

In Kapitel 3 wird das Faltungsphänomen, die Roddeman Theorie und deren Transformation aus der Momentankonfiguration in die Referenzkonfiguration beschrieben. Eine konsistente Linearisierung für den FE-Algorithmus wird angegeben. Dieses Kapitel bildet die Grundlage für die neu entwickelten Faltenalgorithmen.

Mit der Membranfaltung bei einem linear elastischen Materialverhalten beschäftigt sich das Kapitel 4. In diesem Fall sind weitgehend analytische Betrachtungen möglich. Für einfache Beispiele werden Lösungen angegeben.

Ein Lösungsverfahren für Faltung bei Auftreten von plastischen Deformationen wird in Kapitel 5 vorgestellt. Dabei wird das Konzept der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten genutzt. Das Faltenkriterium muß modifiziert werden. Große Beachtung ist in diesem Falle den Startwerten für die Iteration des Faltenalgorithmus zu schenken. Hierbei kann man auf Ergebnisse aus Kapitel 4 zurückgreifen. Aus dem Faltenalgorithmus für inelastische Membranen kann ein Verfahren abgeleitet werden, das thermische Einflüsse auf die Membranfaltung berücksichtigt. Dieses Verfahren wird in Kapitel 6 vorgestellt.

Beispiele für numerische Strukturberechnungen werden in Kapitel 7 gegeben. Das Vorgehen bei diesen Berechnungen wird erläutert. Die Leistungsfähigkeit und die Grenzen des vorgestellten Verfahrens sollen in einem Vergleich von Rechnung und Experiment für das Beispiel der verdrehten Kreisringmembran aufgezeigt werden.

Im Anhang (Kapitel 9) werden die mathematischen und kontinuumsmechanischen Grundlagen dargelegt. Die verwendete Notation wird, sofern sie nicht eindeutig ist, erläutert. Auf die Beschreibung von Flächen, des Deformations- und Membrankraftzustandes sowie auf das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V.) als eine Form der Gleichgewichtsbedingungen wird eingegangen. Die in dieser Arbeit zur Anwendung kommenden Materialgesetze werden vorgestellt.

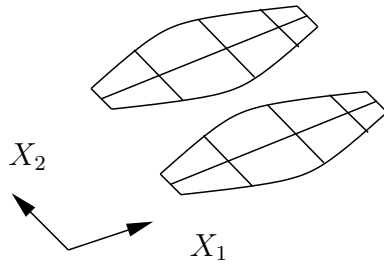
Kapitel 2

Numerische Behandlung der Membran

Zur Bearbeitung komplexer strukturmechanischer Problemstellungen hat sich die finite Elemente Methode als ein Standardverfahren etabliert. In diesem Kapitel wird die Formulierung von Membranelementen (constant strain Dreiecks- und bilineares Viereckselement) beschrieben. Auf die Lösungsverfahren zur Bestimmung der Gleichgewichtslage einer Membranstruktur wird kurz eingegangen. Im Rahmen dieser Arbeit wird auf Elementformulierungen von Schoop [33] und Taenzer [39] zurückgegriffen. Diese Elemente basieren auf der Schnittmuster methode. Details zur Elementformulierung findet man auch bei Verhoeven [41] und Lübcke [19]. Für die Ermittlung der Elementsteifigkeiten und der Knotenkräfte wird bei den hier gewählten Elementformulierungen der Membrankraftzustand und die MembranstEIFigkeit benötigt. Diese können durch die Membranfaltung beeinflusst sein. Die im weiteren vorgestellten Faltenalgorithmen lassen sich ohne Probleme in die vorhandenen Elementformulierungen einfügen und liefern dem finiten Element die benötigten Membrankräfte und Steifigkeiten entsprechend des Faltungszustandes.

Bei der Herstellung zahlreicher Membranstrukturen wird aus ebenen, nach einem Schnittmuster gefertigten Bahnen eine räumlich gekrümmte Membran zusammengesetzt. Auf die finite Elemente Methode übertragen heißt das, daß es eine aus mehreren Teilen bestehende, ebene Referenzkonfiguration (RKF) der Membranstruktur gibt. Diese ebenen Einzelteile werden in der räumlichen, aktuellen Lage (oder Momentankonfiguration, MKF) zusammengefügt. Programmtechnisch geschieht diese Verknüpfung der einzelnen Membranteile zur gesamten Membranstruktur durch je eine Knoten- und Elementnumerierung für die Referenzkonfiguration und die Momentankonfiguration. Hierdurch können unterschiedliche Knoten in der RKF einem Knoten in der MKF zugewiesen werden. Die Knotenanzahl in der RKF und der MKF ist in der Regel unterschiedlich. Der Grundgedanke der Schnittmuster methode ist in Abbildung 2.1 veranschaulicht. Bei der Umsetzung dieser Idee ist darauf zu achten, daß an den Rändern zweier Teile, die in der MKF eine gemeinsame Nahtstelle bilden, die RKF-Knotenabstände jeweils gleich oder zumindest fast gleich sind. Besteht eine

ebene Referenz



3D-Membran, MKF

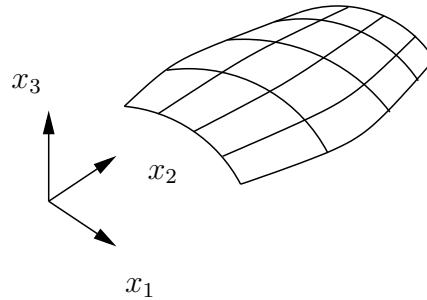


Abbildung 2.1: Ebenes Schnittmuster und räumliche Membran

kleine Differenz in der RKF, so bedeutet dies, daß die Dehnungen längs dieser Seite in den zwei angrenzenden finiten Elementen unterschiedlich sind. Das entspräche einer “Stoffzugabe” in einem realen Fertigungsprozeß.

Ausgangspunkt der FE-Formulierung bildet hier das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V)

$$\delta A^i = \delta A^a \quad (2.1)$$

mit den inneren bzw. äußeren virtuellen Arbeiten δA^i und δA^a .

Die virtuelle äußere Arbeit eines Elementes: Für ein Element lautet die virtuelle äußere Arbeit der Flächenlasten \mathbf{p} und des Gewichts \mathbf{q}

$$\delta A_{el}^a = \int_a \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{x} da + \int_A \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{x} dA \quad (2.2)$$

$$= \int_a p_i \delta x_i da + \int_A q_i \delta x_i dA \quad (2.3)$$

Hierbei sind

- \mathbf{p} der Vektor Flächenlast auf der Membran,
- \mathbf{q} der Vektor Gewichtslast der Membran
- dA , A das Flächendifferential bzw. die Elementfläche in der RKF
- da , a das Flächendifferential bzw. die Elementfläche in der MKF

Der Index i verweist auf die Richtungen \mathbf{e}_i . Für i und andere lateinische Indizes gilt in der Regel $i = 1, 2, 3$. Ausnahmen sind Knotenindizes eines finiten Elementes. Griechische Indizes können die Werte 1 und 2 annehmen, so daß z.B. $\alpha = 1, 2$ gilt.

Die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{x}$ (bzw. die Variation der Koordinaten der Membranfläche) werden mit den noch einzuführenden Ansatzfunktionen interpoliert. Somit geht die Variation $\delta \mathbf{x}$ in eine Variation der diskreten Knotenfreiwerte $\delta \mathbf{x}_n$ über.

Desweiteren sind die an einem Rand s der Membran wirkenden Randlasten \mathbf{P}^C zu berücksichtigen. Die statisch gleichwertige Aufteilung der linienhaft verteilten Randlast auf Knoteneinzelkräfte erfolgt durch Anwendung der noch einzuführenden Interpolationsvorschriften auf die virtuellen Verschiebungen $\delta \mathbf{x}$ im Arbeitsausdruck der Randlasten entsprechend Gleichung 9.41:

$$\delta A_{Rand}^a = \int_s \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{P}^C ds \quad (2.4)$$

Für Details wird z.B. auf Zienkiewicz [48] verwiesen.

Die virtuelle innere Arbeit eines Elementes ist:

$$\delta A_{el}^i = \int_A \mathbf{S} \cdot \delta \mathbf{D} dA = \int_A S_{\alpha\beta} \delta D_{\beta\alpha} dA \quad (2.5)$$

Zur Beschreibung der virtuellen inneren Arbeit ist eine Formulierung der Verzerrungen in Abhängigkeit von den Elementfreiheitsgraden, d.h. der Knotenkoordinaten x_{ik} notwendig. Die Indizes der Knotenkoordinaten x_{ik} haben die folgende Bedeutung:

- i – Richtungsindex, er kennzeichnet die drei Koordinatenrichtungen \mathbf{e}_i
- k – Knotenindex, er läuft über die lokalen Knotennummern des Elementes

Für die Referenzkoordinaten $X_{\alpha k}$ gilt Gleiches mit den Referenzrichtungen \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 . Die eingeführte lokale Knotennumerierung wird in den Abbildungen 2.2 und 2.3 gezeigt.

2.1 Greensche Verzerrungen im finiten Element

Ziel ist im folgenden, die Greenschen Verzerrungen

$$\mathbf{D} = D_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \circ \mathbf{e}_\beta = \frac{1}{2} (F_{i\alpha} F_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \mathbf{e}_\alpha \circ \mathbf{e}_\beta \quad (2.6)$$

im Membranelement zu bestimmen.

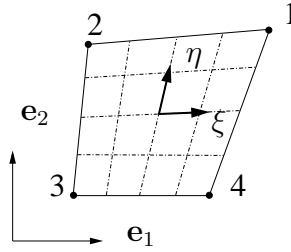


Abbildung 2.2: Viereckselement in der Referenzebene

Viereckselement: Zur Beschreibung der Membranfläche werden die Flächenkoordinaten q^Λ (mit $\Lambda = 1, 2$)

$$q^1 = \xi \quad q^2 = \eta \quad (2.7)$$

verwendet. Die Position der Membran in der Referenzkonfiguration wird zwischen den Elementknoten bilinear interpoliert:

$$\mathbf{X} = h_k \mathbf{X}_k \quad \text{oder} \quad X_\alpha = h_k X_{\alpha k} \quad (2.8)$$

Es soll ein isoparametrisches Element verwendet werden, so daß für die Momentan-konfiguration der Ansatz

$$\mathbf{x} = h_k \mathbf{x}_k \quad \text{oder} \quad x_i = h_k x_{ik} \quad (2.9)$$

gilt. Die Funktionen für die bilineare Interpolation lauten:

$$h_1 = \frac{1}{4} (1 + \eta) (1 + \xi) \quad (2.10)$$

$$h_2 = \frac{1}{4} (1 - \eta) (1 + \xi) \quad (2.11)$$

$$h_3 = \frac{1}{4} (1 - \eta) (1 - \xi) \quad (2.12)$$

$$h_4 = \frac{1}{4} (1 + \eta) (1 - \xi) \quad (2.13)$$

Mit den eingeführten Beschreibungen der Flächen in der Referenz und der aktuellen Lage kann nun der Deformationsgradient $F_{i\alpha}$

$$F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial q^\Lambda} \frac{\partial q^\Lambda}{\partial X_\alpha} \quad (2.14)$$

bestimmt werden. Die Ableitung

$$\frac{\partial x_i}{\partial q^\Lambda} = \frac{\partial h_k}{\partial q^\Lambda} x_{ik} \quad (2.15)$$

kann aus den gegebenen Ansatzfunktionen ermittelt werden, so daß mit der Jacobi Matrix bzw. der inversen Jacobi Matrix

$$J_{\Lambda\alpha} = \frac{\partial h_k}{\partial q^\Lambda} X_{\alpha k} \quad J_{\Lambda\alpha}^{-1} = \frac{\partial q^\Lambda}{\partial h_k X_{\alpha k}} \quad (2.16)$$

auch der Deformationsgradient bestimmt ist:

$$F_{i\alpha} = \frac{\partial h_k}{\partial q^\Lambda} x_{ik} J_{\Lambda\alpha}^{-1} \quad (2.17)$$

Die Greenschen Verzerrungen ergeben sich dann aus Gleichung 2.6.

Dreieckselement: Zur Beschreibung der Membranfläche werden wieder die Flächenkoordinaten q^Λ verwendet.

$$q^1 = \xi \quad q^2 = \eta \quad (2.18)$$

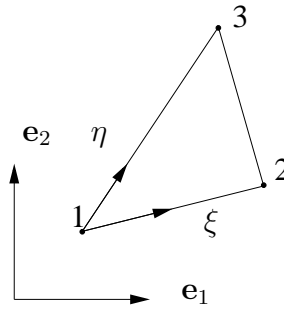


Abbildung 2.3: Dreieckselement in der Referenzebene

Die Ansatzfunktionen für das Dreiknotenelement sind

$$L_1 = 1 - \xi - \eta \quad (2.19)$$

$$L_2 = \xi \quad (2.20)$$

$$L_3 = \eta \quad (2.21)$$

Mit den Knotenkoordinaten und den Interpolationsfunktionen werden die Referenzkonfiguration

$$\mathbf{X} = L_k \mathbf{X}_k \quad \text{oder} \quad X_\alpha = L_k X_{\alpha k} \quad (2.22)$$

und die Momentankonfiguration

$$\mathbf{x} = L_k \mathbf{x}_k \quad \text{oder} \quad x_i = L_k x_{ik} \quad (2.23)$$

beschrieben. Der Deformationsgradient

$$F_{i\alpha} = \frac{\partial x_i}{\partial X_\alpha} = x_{ik} \frac{\partial L_k}{\partial X_\alpha} \quad (2.24)$$

ist relativ leicht zu bestimmen, da die Gleichung 2.22 einfach invertiert werden kann.

$$\xi = \frac{1}{2A} [(X_{23} - X_{21}) X_1 + (X_{11} - X_{13}) X_2 + (X_{13}X_{21} - X_{11}X_{23})] \quad (2.25)$$

$$\eta = \frac{1}{2A} [(X_{21} - X_{22}) X_1 + (X_{12} - X_{11}) X_2 + (X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21})] \quad (2.26)$$

Die für den Deformationsgradienten notwendigen Ableitungen

$$\frac{\partial L_k}{\partial X_\alpha} = \frac{\partial L_k}{\partial q_\Lambda} \frac{\partial q_\Lambda}{\partial X_\alpha} \quad (2.27)$$

können somit direkt gebildet werden. Ist der Deformationsgradient bekannt, so ergeben sich die Greenschen Verzerrungen aus Gleichung 2.6.

2.2 Knotenkräfte und Steifigkeitsmatrix

Sind die Verzerrungen bestimmt, so ergeben sich die Membrankräfte $S_{\alpha\beta}$ aus dem Materialgesetz. Die Variation der Dehnungen in der virtuellen inneren Arbeit (Gleichung 2.5) geht durch die Diskretisierung in eine Variation der Knotenkoordinaten x_{ik} über und man erhält

$$\delta A_{el}^i = \int_A S_{\alpha\beta} \frac{\partial D_{\beta\alpha}}{\partial x_{ik}} dA \delta x_{ik} = f_{ik}^{i,el} \delta x_{ik} \quad (2.28)$$

Dabei sind

$$f_{ik}^{i,el} = \int_A S_{\alpha\beta} \frac{\partial D_{\beta\alpha}}{\partial x_{ik}} dA \quad (2.29)$$

die inneren Knotenkräfte des Elementes. Analog verfährt man auch mit den äußeren Lasten in Gleichung 2.3. Durch Ableitung der Elementknotenkräfte nach den Elementfreiheitsgraden erhält man die Elementsteifigkeitsmatrix (hier ohne den Laststeifigkeitsanteil):

$$K_{ik\ mn}^{i,el} = \frac{\partial f_{ik}^{i,el}}{\partial x_{mn}} \quad (2.30)$$

$$= \int_A \left(\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial D_{\gamma\delta}} \frac{\partial D_{\gamma\delta}}{\partial x_{mn}} \frac{\partial D_{\beta\alpha}}{\partial x_{ik}} + S_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 D_{\beta\alpha}}{\partial x_{ik} \partial x_{mn}} \right) dA \quad (2.31)$$

Die notwendigen Integrationen werden beim Viereckselement numerisch mit der Gauß Integration ausgeführt (siehe z.B. [2], [28], [48]). Beim Dreieckselement ist der Integrand konstant.

In den Knotenkräften und Elementsteifigkeiten Gleichungen 2.29 und 2.31 ist der Einfluß der Membranfaltung auf die Größen $S_{\alpha\beta}$ bzw. $\frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial D_{\gamma\delta}}$ zu berücksichtigen.

Globales Knotengleichgewicht: Für die gesamte Struktur ergeben sich die diskretisierten Gleichgewichtsbedingungen. Randlasten werden durch Auswertung der Beziehung 2.4 in den äußeren Kräften berücksichtigt. Geometrische Randbedingungen

gehen durch vorgeschriebenen Knotenverschiebungen oder z.T. in Form von Nebenbedingungen (hierzu siehe Taenzer [39]) in die Analyse ein. Die globalen inneren und äußeren Knotenkräfte müssen die Bedingung

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{a}) - \mathbf{f}_a(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \quad (2.32)$$

erfüllen. Die Vektoren \mathbf{f}_i und \mathbf{f}_a enthalten die gesamten an den Knoten wirkenden inneren bzw. äußeren Kräfte und werden aus den Elementknotenkräften zusammengesetzt. Im Vektor \mathbf{a} sind alle unbekannten Knotenkoordinaten zu einem Vektor zusammengefaßt. Wird zum Auffinden der Gleichgewichtslage das Newton Raphson Verfahren verwendet, so ist das Gleichungssystem

$$\mathbf{K}(\mathbf{a}) \cdot \Delta \mathbf{a} = \mathbf{f}_a(\mathbf{a}) - \mathbf{f}_i(\mathbf{a}) \quad (2.33)$$

zu lösen. \mathbf{K} ist die Steifigkeitsmatrix des Gesamtsystems, die in der Regel von der Momentankonfiguration abhängig ist. Aus dem Inkrement $\Delta \mathbf{a}$ ergeben sich die neuen Knotenkoordinaten im Rahmen des Iterationsprozesses

$$\mathbf{a}_{neu} = \mathbf{a} + \Delta \mathbf{a} \quad (2.34)$$

Kapitel 3

Faltentheorie

Membranen sind sehr dünne Flächentragwerke mit geringer, vernachlässigbarer Biegesteifigkeit. Bekanntlich treten bei Flächentragwerken unter gewissen Umständen Instabilitätserscheinungen auf. Wegen der sehr geringen Biegesteifigkeit wird hier angenommen, daß Membranen nur Zugkräfte übertragen können. Die Faltentheorie bzw. der Faltenalgorithmus soll diesem Umstand Rechnung tragen und sicherstellen, daß bei numerischen Simulationen in der Membranstruktur ein Zugfeld bestimmt wird. Einem Ansatz Roddemans folgend werden in dieser Arbeit die vom finiten Element vorgegebenen Dehnungen so korrigiert, daß gerade ein einachsiger Membrankraftzustand hervorgerufen wird. In diesem Kapitel werden die Membran- und die Schalentheorie, deren Möglichkeiten sowie die in beiden Theorien verwendeten Begriffe gegenübergestellt. Die Roddemansche Faltentheorie wird erläutert, eine Transformation der Faltenkinematik und der Faltenbedingung in die Referenzkonfiguration durchgeführt sowie eine konsistente Linearisierung für die FE-Methode angegeben. Darüber hinaus wird eine Variante des Faltenalgorithmus für 3D-Formulierungen des Materialgesetzes vorgestellt.

Üblicherweise werden Instabilitätserscheinungen bei Flächentragwerken mit Hilfe der Schalentheorie analysiert. Eine Gegenüberstellung der Schalentheorie mit der Membrantheorie bzw. Faltentheorie soll der Übersichtlichkeit bei den hier verwendeten Begriffen dienen.

Schalentheorie: Hierbei wird die Biegesteifigkeit des Tragwerks berücksichtigt und Biegeeffekte in Rechnung gestellt. Zur Beschreibung des Tragwerks werden die Koordinaten einer Bezugsfläche und Rotationsfreiheitsgrade (oder gleichwertige Freiheitsgrade) verwendet. Instabilitäten treten bei Erreichen einer kritischen Last auf. Prinzipiell ist mit der Schalentheorie eine Analyse des überkritischen Strukturverhaltens möglich. Aus einer Nachbeulanalyse können detaillierte Informationen über den Deformations- und den Spannungszustand gewonnen werden.

Membrantheorie: In der Membrantheorie bleiben Biegeeffekte unberücksichtigt. Die Biegesteifigkeit des Tragwerks wird vernachlässigt. Zur Beschreibung der Membranstruktur sind die Koordinaten einer Bezugsfläche ausreichend. Auf Rotationsfrei-

heitsgrade kann verzichtet werden. Somit wird die Problemformulierung deutlich einfacher als bei der Schalentheorie. Aus der Vernachlässigung der Biegeeffekte resultieren allerdings auch Einschränkungen in der Leistungsfähigkeit der Membrantheorie. So ist die genaue Lage der gefalteten (gebeulten) Membran nicht bestimmbar. Es wird hier mit einer fiktiven Konfiguration gearbeitet. Die Aussagen zum Membrankraftzustand tragen globalen Charakter. Eine detaillierte Analyse des Deformationszustandes ist mit der Membrantheorie für eine gefaltete Membran im allgemeinen nicht möglich. Trotzdem ist die Membrantheorie gut geeignet, Aussagen zum Tragverhalten von Membranstrukturen zu treffen.

Schalentheorie	Membran- bzw. Faltentheorie
Tragwerk mit Biegesteifigkeit, Biegeeffekte werden voll erfaßt	Tragwerk ohne Biegesteifigkeit, Biegeeffekte werden vernachlässigt
kritische Last	Faltenkriterium
Nachbeulanalyse	Faltenbedingung
Berechnung der Beulform möglich	keine Berechnung der gefalteten Lage möglich, Betrachtung einer "fiktiven" Konfiguration

Tabelle 3.1: Gegenüberstellung von Schalen- und Membrantheorie

3.1 Faltenkriterium

Es werden drei Zustände einer Membran unterschieden:

- die straffe Membran
- die regellos gefaltete oder schlaffe Membran und
- die homogen gefaltete Membran.

Das Faltenkriterium soll Auskunft darüber geben, ob bei den gegebenen Umständen Faltung eintritt. In der Vergangenheit wurden einige Faltenkriterien formuliert. Diese Faltenkriterien basieren auf der Auswertung entweder des Membrankraftzustandes (siehe Otto & Trostel [26]) oder des Dehnungszustandes (siehe Miller et al. [24]). Einen guten Überblick über die Entwicklung des Faltenkriteriums findet man bei Ziegler [47]. In dieser Arbeit wird das gemischte Faltenkriterium von Roddeman aus [30] verwendet. Dieses Faltenkriterium nutzt Informationen sowohl über den Membrankraftzustand als auch über den Dehnungszustand, (hier mit den 2. Piola Kirchhoff Membrankräften und den Greenschen Verzerrungen formuliert):

- Straffer Zustand: Eine Membran ist straff, wenn die Hauptmembrankräfte S_I und S_{II} größer Null sind, d.h. wenn $S_I > 0$ und $S_{II} > 0$ gilt.

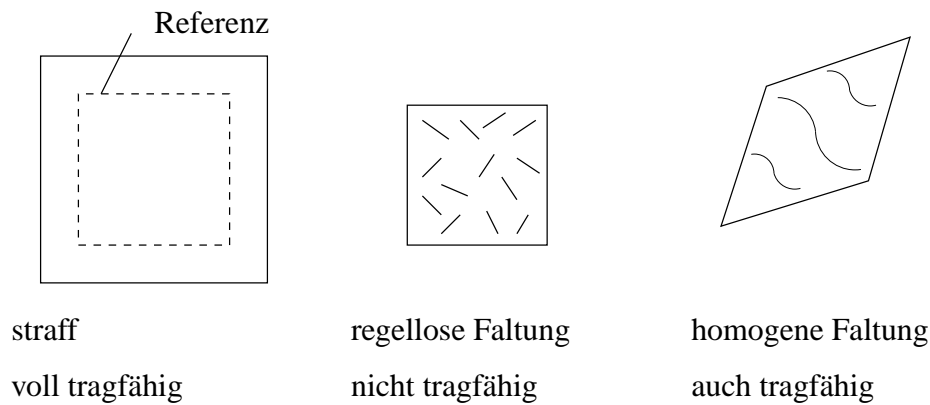
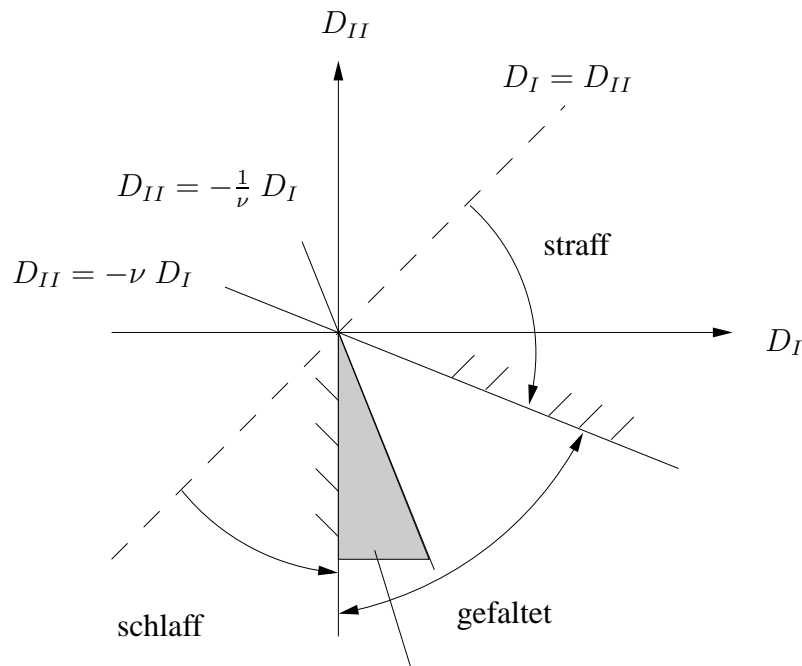


Abbildung 3.1: Die drei Zustände einer Membran

- **Schlaffer Zustand:** Eine Membran ist schlaff (oder regellos gefaltet), wenn der Dehnungszustand ausschließlich durch Stauchungen gekennzeichnet ist, d.h. wenn für die Hauptdehnung $D_I < 0$ und $D_{II} < 0$ gilt. Im schlaffen Zustand sind die Membrankräfte gleich Null. Die Membran besitzt in diesem Zustand keine Steifigkeit.
- **Homogen gefaltete Membran:** Wenn eine Membran weder straff noch schlaff ist, tritt der homogen gefaltete Zustand auf. Dieser Zustand ist durch einen einachsigen Membrankraftzustand gekennzeichnet. Die homogene Faltung und deren Auswirkungen auf die Membransteifigkeit wird in Kapitel 3.2 untersucht.

Dieses Faltenkriterium gilt nicht nur für linear elastisches Material, sondern für alle hyperelastischen Materialien, sofern keine Materialinstabilität auftritt. Wiedemann weist in [43] darauf hin, daß die regellose Faltung bei vorhandenen Flächenlasten wie Gewicht oder Luftdruck nicht auftritt.

Für eine isotrope Membran sind die Bereiche der möglichen Zustände in Abbildung 3.2 im Hauptdehnungsraum dargestellt. Hierbei wird $D_I > D_{II}$ angenommen. Die Grenze zwischen dem straffen und dem gefalteten Zustand ist durch die Linie $D_{II} = -\nu D_I$, d.h. $S_I > S_{II} > 0$, gegeben. Dehnungszustände oberhalb dieser Linie führen zu einer straffen Membran. Die vertikale Linie $D_I = 0$ kennzeichnet die Grenze zwischen dem gefalteten und dem schlaffen Zustand. Interessant ist die Gerade $D_{II} = -\nu D_I$. Unterhalb dieser Geraden gilt $0 > S_I > S_{II}$. Bei dem mit Membrankräften formulierten Faltenkriterium (siehe [26]), welches das Auftreten von zwei negativen Hauptmembrankräften als einen schlaffen Zustand interpretiert, wird diese Linie als Grenze zwischen dem gefalteten und dem schlaffen Zustand angenommen. Da hier mit einem zweiachsigen Materialgesetz gearbeitet wird, jedoch der Membrankraftzustand aufgrund der Faltung einachsig ist, ist diese Annahme $0 > S_I > S_{II}$ für den schlaffen Zustand nicht korrekt. Der Bereich, in dem dieser Effekt auftreten kann, ist grau markiert. Solange eine Hauptdehnung positiv ist, kann bei stabilem Materialverhalten regellose Faltung ausgeschlossen werden.



schlaff bei Faltenkriterium aus [26]

Abbildung 3.2: Fallunterscheidung bei einer isotropen Membran im Hauptdehnungsraum

3.2 Homogene Membranfaltung nach Roddeman

Wagner [42] und Reissner [29] führen die Idee eines Zugfeldes, in dem ein einachsiger Membrankraftzustand herrscht, ein. Die Richtung der Zugkraft in der Membran wird durch den Einheitsvektor \mathbf{n}_\perp gekennzeichnet. Senkrecht zur Zugrichtung (oder auch Faltrichtung) ist die Faltungsrichtung \mathbf{n} .

3.2.1 Faltenkinematik

Um einen einachsigen Membrankraftzustand bei einem vorgegebenen, vom finiten Element ermittelten Dehnungszustand zu gewährleisten, schlägt Roddeman [30] eine Korrektur der Membrankinematik vor. Hierzu werden die folgenden Konfigurationen mit zugehörigem Deformationsgradienten eingeführt. Die Konfigurationen sind in Abbildung 3.3 dargestellt.

- Der Deformationsgradient $\tilde{\mathbf{F}}$ bildet die Membran von der Referenz in die tatsächlich bestehende, gefaltete Lage ab. Diese gefaltete Lage kann mit der Membrantheorie nicht bestimmt werden. Allerdings ist zur Analyse des Tragverhaltens die Kenntnis der komplizierten Abbildung $\tilde{\mathbf{F}}$ nicht notwendig.
- Die Abbildung \mathbf{F} beschreibt den Übergang der Membran von der Referenz in

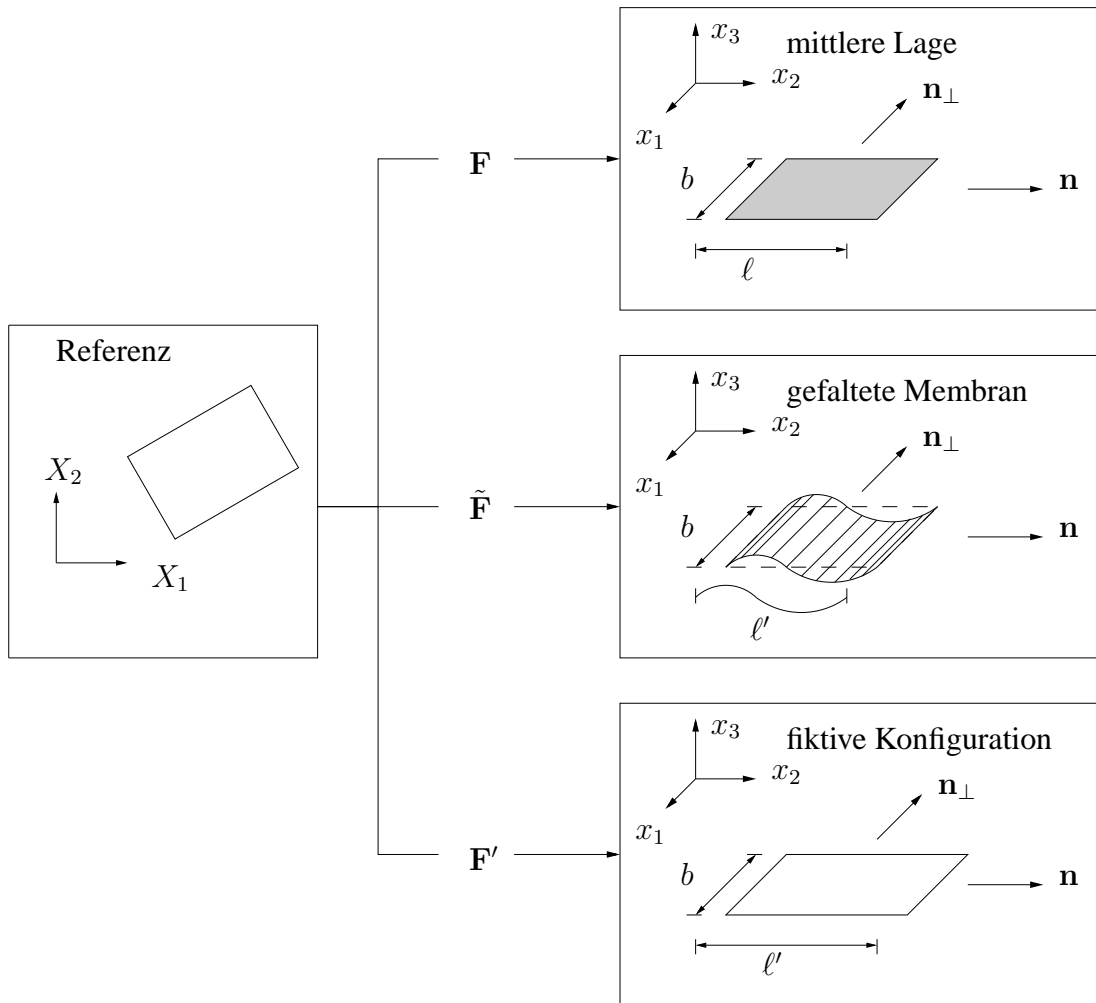


Abbildung 3.3: Faltenkinematik der homogenen Faltung

eine mittlere Lage. Diese Lage wird z.B. durch die Interpolationsfunktionen der finiten Elemente beschrieben. Die Länge ℓ dieser Mittelfläche in Faltungsrichtung \mathbf{n} ist kürzer als die entlang dieser Richtung tatsächlich vorhandene Länge ℓ' . Somit sind die aus dieser Konfiguration ermittelten Dehnungen nicht für eine korrekte Bestimmung des Membrankraftzustandes geeignet.

- Denkt man sich die gefaltete Membran in die durch \mathbf{n} und \mathbf{n}_\perp aufgespannte Ebene abgewickelt, so erhält man die fiktive Konfiguration. In dieser Konfiguration stimmt die Länge in Faltungsrichtung \mathbf{n} mit der wirklichen Länge ℓ' der gefalteten Membran überein. Die aus dieser Konfiguration ermittelten Dehnungen sind für die Membrankraftbestimmung geeignet. Der zugehörige Deformationsgradient wird mit \mathbf{F}' bezeichnet.

Die Breite b ist in allen drei Konfigurationen gleich. Die Länge der mittleren Lage ℓ und die tatsächliche Länge der gefalteten Membran ℓ' werden durch das Roddeman-sche Faltungsmaß β_R in Beziehung gesetzt:

$$\ell' = (1 + \beta_R) \ell \quad (3.1)$$

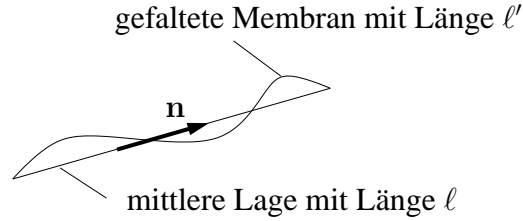


Abbildung 3.4: Längen der gefalteten und der mittleren Konfiguration entlang der Faltungsrichtung

Roddeman berücksichtigt die Faltung dadurch, daß ein Korrekturterm im Deformationsgradient eingeführt wird:

$$\mathbf{F}' = (\mathbf{E}_3 + \beta_R \mathbf{n} \circ \mathbf{n}) \cdot \mathbf{F} \quad (3.2)$$

$(\cdot)'$ kennzeichnet im weiteren Größen, die sich auf die korrigierte Kinematik 3.2 beziehen. \mathbf{E}_3 ist der räumliche Einheitstensor. Somit wird bei der Abbildung eines Linienelementes aus der Referenz in die aktuelle Lage in Faltungsrichtung \mathbf{n} eine um den Faktor $(1 + \beta_R)$ größere Länge berücksichtigt, als die mittlere Lage vorgibt. \mathbf{F}' gibt somit die tatsächliche Länge richtig wieder. In einer homogen gefalteten Membran herrscht ein einachsiger Membrankraftzustand. Bei der von Roddeman eingeführten Korrektur des Deformationsgradienten \mathbf{F}' in Gleichung 3.2 sind nun die Faltungsrichtung \mathbf{n} und das Faltungsmaß β_R so zu wählen, daß ein einachsiger Membrankraftzustand erzeugt wird. Zunächst soll jedoch die Bedingung des einachsigen Membrankraftzustandes formuliert werden.

3.2.2 Faltenbedingung

In der Membran herrscht ein einachsiger Membrankraftzustand. Das heißt, daß an einem Schnitt entlang der Zugrichtung \mathbf{n}_\perp der aus der Membran austretende Kraftvektor $d\mathbf{k}^C$ (siehe Kapitel 9.4) verschwindet. Roddeman formuliert die Bedingung des einachsigen Membrankraftzustandes mit den Cauchy Membrankräften \mathbf{S}^C :

$$\mathbf{0} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}^C(\mathbf{F}') \quad (3.3)$$

Gleichung 3.3 wird Faltenbedingung genannt. Die vektoriell formulierten Faltenbedingungen können auch durch zwei skalare Gleichungen ausgedrückt werden, in dem Gleichung 3.3 mit \mathbf{n} bzw. \mathbf{n}_\perp skalar multipliziert wird:

$$0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}^C(\mathbf{F}') \cdot \mathbf{n} \quad (3.4)$$

$$0 = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}^C(\mathbf{F}') \cdot \mathbf{n}_\perp \quad (3.5)$$

Die Erfüllung der Faltenbedingungen stellt einen einachsigen Membrankraftzustand sicher. Der verbleibende, von Null verschiedene Membrankrafthauptwert, muß positiv sein, um eine physikalisch sinnvolle Lösung des Faltenproblems zu ergeben.

3.3 Transformation der Faltenkinematik

Die von Roddeman eingeführte Faltenkinematik und Faltenbedingung sind mit den Größen β_R , \mathbf{n} und $\mathbf{S}^C(\mathbf{F}')$ formuliert, die sich sämtlich auf die aktuelle Lage beziehen. Es ist mit Hinblick auf die FE-Formulierung und im Falle eines anisotropen Materialverhaltens zweckmäßig, diese auf die aktuelle Tangentialebene bezogenen Gleichungen in die Referenzebene zu transformieren. Im folgenden soll diese Formulierung auf referenzbezogene Größen entsprechend des von Schoop, Taenzer & Hornig in [35] vorgestellten Verfahrens hergeleitet werden. Die Möglichkeit einer solchen Darstellung wurde auch von Seokwoo & Seyoung in [37] sowie von Lu, Accorsi & Leonard in [18] gezeigt. Einen Ansatz zur Transformation findet man ebenfalls bei Taenzer [39]. Taenzer führt die polare Zerlegung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ in den Strecktensor \mathbf{U} und den Drehtensor \mathbf{R} durch und bildet die orthogonalen Richtungen \mathbf{n} und \mathbf{n}_\perp mit dem Drehtensor \mathbf{R} in ein Paar orthogonaler Einheitsvektoren in die Referenzebene ab. Diese Grundidee wird hier aufgegriffen und modifiziert. Dem Vektor \mathbf{n} wird durch die Umkehrung der materiellen Abbildung \mathbf{F} ein in der Referenzebene liegender Vektor \mathbf{h} zugeordnet (siehe Abbildung 3.5):

$$\mathbf{n} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{F}^T \quad (3.6)$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (3.7)$$

Im allgemeinen ist \mathbf{h} kein Einheitsvektor. Der korrigierte Deformationsgradient \mathbf{F}'

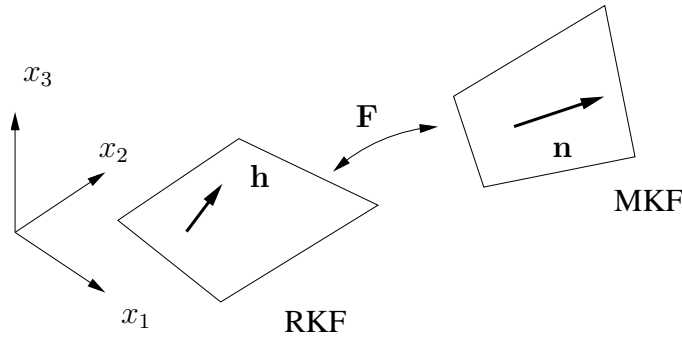


Abbildung 3.5: Rücktransformation der aktuellen Faltenrichtung in die Referenz

Gleichung 3.2 kann mit Gleichung 3.6 umgeschrieben werden:

$$\mathbf{F}' = (\mathbf{E}_3 + \beta_R \mathbf{n} \circ \mathbf{h} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot \mathbf{F} \quad (3.8)$$

Mit dem rechten Cauchy Green Verzerrungstensor \mathbf{C} der mittleren Konfiguration

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (3.9)$$

erhält \mathbf{F}' die Form

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} + \beta_R \mathbf{n} \circ (\mathbf{h} \cdot \mathbf{C}) \quad (3.10)$$

Die korrigierten Greenschen Dehnungen

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2} (\mathbf{F}'^T \cdot \mathbf{F}' - \mathbf{E}) \quad (3.11)$$

ergeben sich somit zu

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}^T + \beta_R \mathbf{h} \cdot \mathbf{C} \circ \mathbf{n}) \cdot (\mathbf{F} + \beta_R \mathbf{n} \circ \mathbf{C} \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{E}] \quad (3.12)$$

$$= \mathbf{D} + \left(\beta_R + \frac{\beta_R^2}{2} \right) \mathbf{h} \cdot \mathbf{C} \circ \mathbf{C} \cdot \mathbf{h} \quad (3.13)$$

Der Vektor $\mathbf{C} \cdot \mathbf{h}$ liegt in der Referenzebene. Es ist zweckmäßig, einen neuen Einheits-

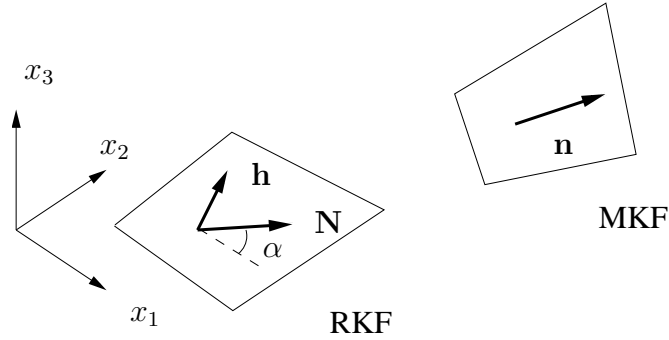


Abbildung 3.6: Vektoren \mathbf{n} , \mathbf{h} und \mathbf{N} zur Beschreibung der Faltenrichtung

vektor \mathbf{N} in der Referenzebene sowie ein neues Faltenmaß β einzuführen. \mathbf{N} hat die gleiche Richtung wie der Vektor $\mathbf{C} \cdot \mathbf{h}$. Der korrigierte Greensche Verzerrungstensor schreibt sich nunmehr als

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \beta \mathbf{N} \circ \mathbf{N} \quad (3.14)$$

Durch Vergleich der beiden Darstellungsformen für die Dehnungen nach Gleichung 3.13 und 3.14 erhält man die Beziehungen zwischen den Roddemanschen Größen β_R , \mathbf{n} und den referenzbezogenen Größen β , \mathbf{N} . Die Richtungen der Vektoren \mathbf{N} und $\mathbf{C} \cdot \mathbf{h}$ sind identisch. Folglich ist β ein Vielfaches von $\left(\beta_R + \frac{\beta_R^2}{2} \right)$, d.h. es gilt z.B.

$$\beta = \frac{1}{k^2} \left(\beta_R + \frac{\beta_R^2}{2} \right) \quad (3.15)$$

Dann folgt aus den Gleichungen 3.13 und 3.14

$$\frac{1}{k^2} \mathbf{N} \circ \mathbf{N} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{C} \circ \mathbf{C} \cdot \mathbf{h} \quad (3.16)$$

woraus wiederum der Schluß

$$\frac{1}{k} \mathbf{N} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{h} \quad (3.17)$$

gezogen werden kann. Es wird nun von der Beziehung $\mathbf{h} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}^{-T}$ (Gleichung 3.7) Gebrauch gemacht. Das führt auf die Beziehung

$$\frac{1}{k} \mathbf{N} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{n} \quad (3.18)$$

oder

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k} \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \quad (3.19)$$

Das Skalarprodukt der linken bzw. rechten Seite mit sich selbst liefert einen Ausdruck für k^2

$$k^2 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{N} \quad (3.20)$$

Die Gleichung 3.15 kann nach β_R aufgelöst werden (unter Berücksichtigung von $\beta_R > 0$)

$$\beta_R = \sqrt{(1 + 2\beta k^2)} - 1 \quad (3.21)$$

Die Umrechnung von referenzbezogenen Größen in Roddemansche Größen in zusammengefaßter Form:

$$\mathbf{n} = \frac{1}{k} \mathbf{N} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{C} = \frac{1}{k} \mathbf{N} \quad (3.23)$$

$$\beta_R = \sqrt{(1 + 2\beta k^2)} - 1 \quad (3.24)$$

mit

$$k = \sqrt{\mathbf{N} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{N}}$$

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, daß trotz der Tatsache, daß die tatsächliche, gefaltete Lage der Membran nicht ermittelt werden kann, eine Abschätzung der Faltenhöhe f möglich ist. Dies geschieht unter der Annahme einer sinusförmigen Falte

$$w(x) = f \sin\left(\frac{2\pi}{\ell} x\right)$$

Für die Bogenlänge ℓ' ist das Integral

$$\ell' = \int_0^{\ell} \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} dx$$

zu lösen. Für Abbildung 3.7 ist das Integral numerisch bestimmt worden. Die Grafik zeigt die Faltenmaße $\beta_R = \left(\frac{\ell'}{\ell} - 1\right)$ sowie β für die Werte $k = 1.0$ und $k = 1.1$ in Abhängigkeit vom Verhältnis $\frac{f^2}{\ell^2}$.

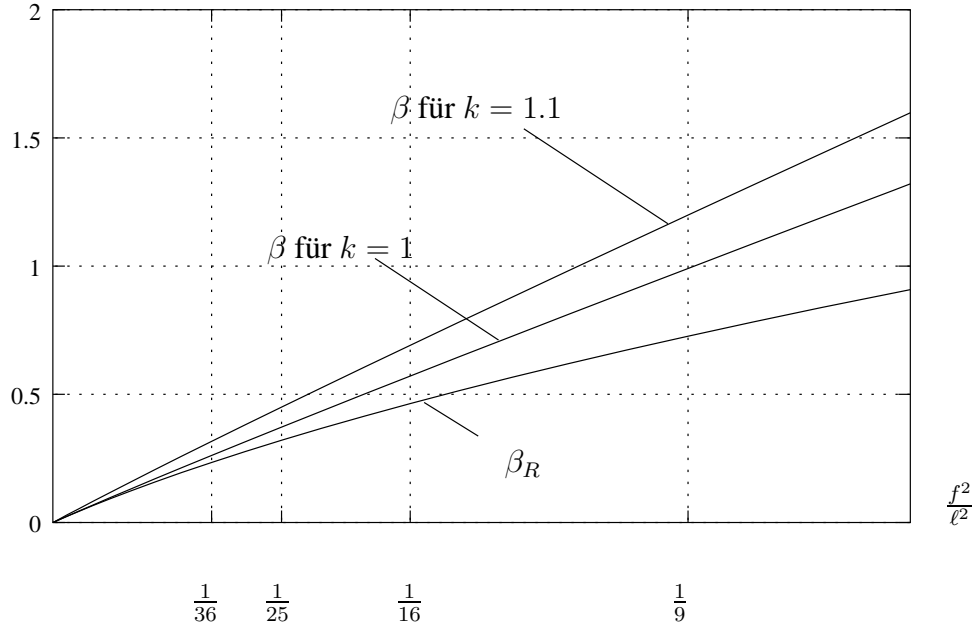


Abbildung 3.7: Zusammenhang zwischen der maximalen Auslenkung f und der Faltenmaße

3.4 Transformation der Faltenbedingungen

Es soll hier ein Materialgesetz für die 2. Piola Kirchhoff Membrankraft verwendet werden.

$$\mathbf{S}' = \mathbf{S}(\mathbf{F}') \quad (3.25)$$

Hierzu ist bei Verwendung des korrigierten Deformationsgradienten die Transformation 9.38

$$\mathbf{S}^C(\mathbf{F}') = \frac{dA}{da} \mathbf{F}' \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{F}'^T$$

auf die Faltenbedingung Gleichung 3.3

$$\mathbf{0} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{S}^C(\mathbf{F}')$$

anzuwenden. Da der von Null verschiedene Faktor $\frac{dA}{da}$ für die Erfüllung der Faltenbedingung unwesentlich ist, geht Gleichung 3.3 in

$$\mathbf{0} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F}' \cdot \mathbf{S}(\mathbf{F}') \cdot \mathbf{F}'^T \quad (3.26)$$

über. Der Term $\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}'$ soll im folgenden genauer untersucht werden. Dieses Produkt wird mittels der Darstellung des korrigierten Deformationsgradienten 3.10 zu

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}' = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{F} + \beta_R \mathbf{n} \circ (\mathbf{h} \cdot \mathbf{C})) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{F} + \beta_R (\mathbf{h} \cdot \mathbf{C}) \quad (3.27)$$

Nach Anwendung von Gleichung 3.18 auf den Term $\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}$ und von Gleichung 3.23 auf den Term $\mathbf{h} \cdot \mathbf{C}$ ergibt sich

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{F}' = \frac{1}{k} (1 + \beta_R) \mathbf{N} \quad (3.28)$$

Wiederum ist für die Erfüllung der Faltenbedingung der Faktor $(1 + \beta_R)$ in Gleichung 3.28 unwesentlich. Als Zwischenergebnis kann die Faltenbedingung

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{F}'^T = 0 \quad (3.29)$$

notiert werden. Die Faltenbedingung 3.29 kann analog zu den Gleichungen 3.5 durch zwei skalare Gleichungen ausgedrückt werden. Hierzu wird Gleichung 3.29 skalar mit den Vektoren \mathbf{n} bzw. \mathbf{n}_\perp multipliziert.

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{F}'^T \cdot \mathbf{n} \quad (3.30)$$

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{F}'^T \cdot \mathbf{n}_\perp \quad (3.31)$$

Es kann nun wieder von der Beziehung 3.28 Gebrauch gemacht werden und man erhält aus Gleichung 3.30

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{N} \quad (3.32)$$

Der Vektor $\mathbf{F}'^T \cdot \mathbf{n}_\perp$ liegt in der Referenzebene. Für diesen in der Referenzebene liegenden Vektor ist eine Darstellung in der Form

$$\mathbf{F}'^T \cdot \mathbf{n}_\perp = \lambda \mathbf{N} + \kappa \mathbf{N}_\perp \quad (3.33)$$

möglich. Setzt man dieses in Gleichung 3.31 ein und beachtet, daß wegen der Gleichung 3.32 ein Anteil verschwindet, so erhält man die zweite Faltenbedingung in der referenzbezogenen Darstellung

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{N}_\perp \quad (3.34)$$

Der Einheitsvektor \mathbf{N}_\perp liegt in der Referenzebene und steht senkrecht auf \mathbf{N} . Die materielle Richtung von \mathbf{N}_\perp ist im allgemeinen verschieden von der materiellen Richtung des Vektors \mathbf{n}_\perp , d.h. \mathbf{N}_\perp und \mathbf{n}_\perp zeigen entlang unterschiedlicher materieller Fasern der Membran. Mit

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{N}$$

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}' \cdot \mathbf{N}_\perp$$

haben die Faltenbedingungen eine referenzbezogene Darstellung erhalten, die formal ähnlich zur Roddemanschen Formulierung (Gleichungen 3.4 und 3.4) ist.

3.5 Numerische Lösung der Faltenbedingungen

Ziel des Faltenalgorithmus soll es sein, eine Lösung der Faltenbedingung 3.32 und 3.34 zu ermitteln. Zur Beschreibung der Einheitsvektoren \mathbf{N} und \mathbf{N}_\perp wird der Winkel α eingeführt, der von der \mathbf{e}_1 -Achse aus zum Vektor \mathbf{N} zählt (siehe Abbildung 3.6).

$$\mathbf{N} = \cos \alpha \mathbf{e}_1 + \sin \alpha \mathbf{e}_2 \quad (3.35)$$

$$\mathbf{N}_\perp = -\sin \alpha \mathbf{e}_1 + \cos \alpha \mathbf{e}_2 \quad (3.36)$$

Die korrigierten Greenschen Verzerrungen (Gleichung 3.14) lauten in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} D'_{11} & D'_{12} \\ D'_{12} & D'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

bzw. nach Anwendung von Additionstheoremen

$$\begin{pmatrix} D'_{11} & D'_{12} \\ D'_{12} & D'_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{12} & D_{22} \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} (1 + \cos 2\alpha) & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & (1 - \cos 2\alpha) \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Die Faltenbedingungen 3.32 und 3.34 haben die Form

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{D}') \cdot \mathbf{N} = f_1(\alpha, \beta) \quad (3.39)$$

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{D}') \cdot \mathbf{N}_\perp = f_2(\alpha, \beta) \quad (3.40)$$

Da die Membrankräfte bei vorgegebenen Dehnungen \mathbf{D} nur von α und β abhängen, sind die Gleichungen 3.39 und 3.40 zwei algebraische Gleichungen für α und β . Sie sind im allgemeinen gekoppelt und nichtlinear. Nach Ausführung der skalaren Multiplikationen und Anwendung von Additionstheoremen lauten die Faltenbedingungen schließlich

$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{S'_{11} + S'_{22}}{2} + \frac{S'_{11} - S'_{22}}{2} \cos 2\alpha + S'_{12} \sin 2\alpha = 0 \quad (3.41)$$

$$f_2(\alpha, \beta) = -\frac{S'_{11} - S'_{22}}{2} \sin 2\alpha + S'_{12} \cos 2\alpha = 0 \quad (3.42)$$

Die Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems erfolgt mit dem Newton Verfahren. Während des Iterationsprozesses werden α und β mit den Inkrementen $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ aktualisiert:

$$\alpha_{neu} = \alpha + \Delta\alpha \quad (3.43)$$

und

$$\beta_{neu} = \beta + \Delta\beta \quad (3.44)$$

Die Inkremente $\Delta\alpha$ und $\Delta\beta$ erhält man aus

$$\begin{pmatrix} f_{1,\alpha} & f_{1,\beta} \\ f_{2,\alpha} & f_{2,\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -f_2 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

Hierbei sind $f_{1,\alpha}$, $f_{1,\beta}$ usw. die partiellen Ableitungen der Faltenbedingungen f_1 und f_2 nach α bzw. β . Im Einzelnen sind diese Ableitungen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} = & \frac{1}{2} (C_{11\gamma\delta} + C_{22\gamma\delta}) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} + \frac{1}{2} (C_{11\gamma\delta} - C_{22\gamma\delta}) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} \cos 2\alpha + \\ & + C_{12\gamma\delta} \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} \sin 2\alpha + f_2 \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} = & - \frac{1}{2} (C_{11\gamma\delta} - C_{22\gamma\delta}) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} \sin 2\alpha + C_{12\gamma\delta} \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} \cos 2\alpha + \\ & - \frac{S'_{11} - S'_{22}}{2} \cos 2\alpha - S'_{12} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \beta} = & \frac{1}{2} (C_{11\gamma\delta} + C_{22\gamma\delta}) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} + \frac{1}{2} (C_{11\gamma\delta} - C_{22\gamma\delta}) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} \cos 2\alpha + \\ & + C_{12\gamma\delta} \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} \sin 2\alpha \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta} = - \frac{1}{2} (C_{11\gamma\delta} - C_{22\gamma\delta}) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} \sin 2\alpha + C_{12\gamma\delta} \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} \cos 2\alpha \quad (3.49)$$

mit den MembranstEIFigkeiten $C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial S'_{\alpha\beta}}{\partial D'_{\gamma\delta}}$, die für den Dehnungszustand $D'_{\gamma\delta}$ vom Materialgesetz her bekannt sind, und den Ableitungen der korrigierten Dehnungen Gleichung 3.38

$$\frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} = \frac{\beta}{2} \begin{pmatrix} -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

und

$$\frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1 + \cos 2\alpha) & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & (1 - \cos 2\alpha) \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

Sind α und β bekannt, so ist praktisch auch der Membrankraftzustand $\mathbf{S}(\mathbf{D}')$ bekannt. Lu et al. geben in [18] einen Bereich an, in dem die Faltungsrichtung α liegen muß. Diese Information kann zur Erlangung einer Vorschätzung für das Newton Verfahren genutzt werden.

3.6 Konsistente Linearisierung

Im Rahmen der Newton Iteration des FE-Algorithmus (Gleichung 2.31) wird die Ableitung der Membrankräfte $\mathbf{S}(\mathbf{D}')$ nach den vom Element vorgegebenen Verzerrungen \mathbf{D} benötigt.

Bei Übergängen vom gefalteten in den straffen Zustand usw. kann nicht davon ausgegangen werden, daß diese Ableitung überhaupt existiert. Für den Großteil der Integrationspunkte kann aber angenommen werden, daß bei einer kleinen Änderung der Momentankonfiguration der jeweilige Membranzustand beibehalten wird und somit die Ableitung gebildet werden kann. Mit der Kettenregel erhält man zunächst

$$\frac{dS_{\alpha\beta}(D'_{\xi\eta})}{dD_{\gamma\delta}} = \frac{\partial S'_{\alpha\beta}}{\partial D'_{\kappa\lambda}} \frac{dD'_{\kappa\lambda}}{dD_{\gamma\delta}} \quad (3.52)$$

Die Ableitung $\frac{\partial S(D')}{\partial D'}$ ist für einen ermittelten Dehnungszustand D' aus dem Materialgesetz her bekannt. Bei der Bildung der Ableitung $\frac{dD'(D,\alpha,\beta)}{dD}$ ist zu berücksichtigen, daß neben dem direkten Einfluß von D auf die korrigierten Dehnungen D' auch Auswirkungen auf die Faltungsrichtung α und das Faltenmaß β bestehen. Die totale Änderung von $D'_{\kappa\lambda}$ lautet:

$$\frac{dD'_{\kappa\lambda}}{dD_{\gamma\delta}} = \frac{\partial D'_{\kappa\lambda}}{\partial D_{\gamma\delta}} + \frac{\partial D'_{\kappa\lambda}}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dD_{\gamma\delta}} + \frac{\partial D'_{\kappa\lambda}}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dD_{\gamma\delta}} \quad (3.53)$$

Zur Bestimmung der Ableitungen von α und β wird angenommen, daß die homogene Faltung nicht nur im Dehnungszustand $D_{\gamma\delta}$ besteht, sondern auch in einem Nachbarzustand. Das heißt, es gibt bei einer kleinen Änderung der mittleren Lage keinen Übergang zu den anderen Membranzuständen straff oder schlaff. Dieser Nachbarzustand erfüllt somit auch die Faltenbedingungen Gleichung 3.39 und 3.40. Die Zuwächse df_i müssen demnach verschwinden:

$$df_i = \frac{\partial f_i}{\partial D_{\gamma\delta}} dD_{\gamma\delta} + \frac{\partial f_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f_i}{\partial \beta} d\beta = 0 \quad (3.54)$$

mit $i = 1, 2$. Teilt man Gleichung 3.54 durch $dD_{\gamma\delta}$ so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} f_{1,\alpha} & f_{1,\beta} \\ f_{2,\alpha} & f_{2,\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d\alpha}{dD_{\gamma\delta}} \\ \frac{d\beta}{dD_{\gamma\delta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial D_{\gamma\delta}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial D_{\gamma\delta}} \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Die 2 x 2 Matrix auf der linken Seite entspricht der aus Gleichung 3.45. Die Ableitungen der rechten Seite sind

$$\frac{\partial f_1}{\partial D_{\gamma\delta}} = \frac{1}{2} (C_{11\gamma\delta} + C_{22\gamma\delta}) + \frac{1}{2} (C_{11\gamma\delta} - C_{22\gamma\delta}) \cos 2\alpha + C_{12\gamma\delta} \sin 2\alpha \quad (3.56)$$

und

$$\frac{\partial f_2}{\partial D_{\gamma\delta}} = -\frac{1}{2} (C_{11\gamma\delta} - C_{22\gamma\delta}) \sin 2\alpha + C_{12\gamma\delta} \cos 2\alpha \quad (3.57)$$

Nach dem Lösen des Gleichungssystems 3.55 können die Membransteifigkeiten bei homogener Faltung mittels Gleichung 3.53 und Gleichung 3.52 ermittelt werden.

3.7 Beispiel: Einfache Scherung

In diesem Abschnitt wird der Faltenalgorithmus auf einen vorgegebenen Dehnungszustand der mittleren Lage angewendet. Eine quadratische Membran erfährt eine einfache Scherdeformation. Der Deformationsprozeß wird durch die Eckpunktverschiebung v beschrieben. Bei einer Membranbreite a herrscht der Dehnungszustand

$$D_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{v}{a} \right)^2 \quad (3.58)$$

$$D_{22} = 0 \quad (3.59)$$

$$D_{12} = \frac{1}{2} \frac{v}{a} = D_{21} \quad (3.60)$$

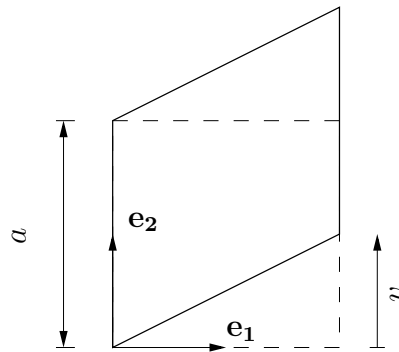


Abbildung 3.8: Einfache Scherdeformation einer quadratischen Membran

Als Geometriewerte werden gewählt:

- Breite $a = 100 \text{ mm}$
- Membrandicke $h = 1 \text{ mm}$

3.7.1 Einfache Scherung bei linearem, orthotropem Material

Die Untersuchungen werden mit dem linearen, orthotropen Material entsprechend Gleichung 9.56 durchgeführt. Die Materialkennwerte sind

- E-Modul $E = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
- $\nu = 0.3$

Der Orthotropieparameter f wird variiert.

Isotrope Membran: Zunächst wird der Fall $f = 1$ betrachtet. Das Material ist isotrop. Abbildungen 3.9 und 3.10 zeigen die Größen der referenzbezogenen Darstellung (α, β) im Vergleich zu den Roddemanschen Größen (α_R, β_R). Da in diesem Beispiel die aktuelle Tangentialebene der mittleren Lage und die Referenzebene der Membran identisch sind, ist ein Vergleich der Faltungsrichtungen möglich. α_R beschreibt die Richtung des Roddemanschen Vektors \mathbf{n} von der \mathbf{e}_1 -Achse aus gezählt. Zu Beginn

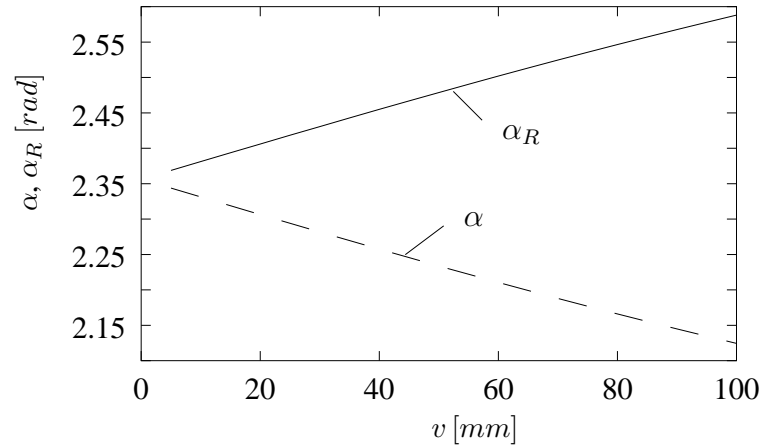


Abbildung 3.9: Einfache Scherung einer isotropen Membran, Vergleich der Faltungsrichtung

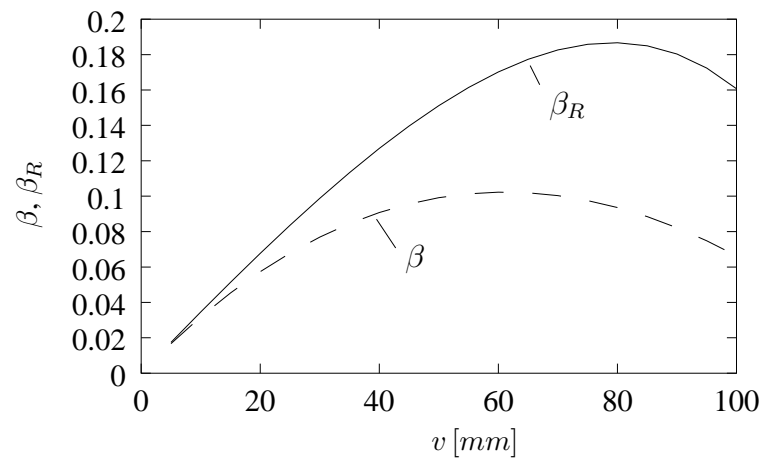


Abbildung 3.10: Einfache Scherung einer isotropen Membran, Vergleich der Faltenmaße

des Deformationsprozesses (hier werden nichtlineare Effekte noch nicht wirksam) ist die Faltungsrichtung in beiden Darstellungsformen 2.356 rad oder 135° . Dieser Winkel beschreibt die Richtung der verschwindenden Membrankraft S_{II} . Folglich wirkt

die Zugkraft S_I anfangs unter einem Winkel von 45° , was den Erwartungen entspricht. Die unterschiedlichen Darstellungen der Faltungsrichtung durch die Maße α_R und α führen zu unterschiedlichen Verläufen der Kurven in Abbildung 3.9. Während der tatsächliche Faltungswinkel α_R mit der Scherung wächst (was unmittelbar plausibel ist), sinkt α . Eine anschauliche Deutung dessen ist möglich, wenn man sich in Erinnerung ruft, daß die Verzerrungen einer in der Referenz zur e_1 -Richtung ausgerichteten Faser quadratisch anwächst. Somit drehen sich auch die Hauptdehnungsrichtungen der Greenschen Verzerrungen bei steigender Scherverformung mehr zur e_1 -Achse hin. Die Faltenmaße β und β_R wachsen zu Beginn der Scherverformung an. Dabei ist β_R größer als β , was unmittelbar aus Gleichung 3.24 folgt. Für größere Verzerrungen jedoch sinken die Faltenmaße. Das ist ein Effekt, der durch die Querkontraktion des Materials hervorgerufen wird.

Orthotrope Membran: Es wird nun der Einfluß der Orthotropie des Materials auf die Faltung untersucht. Abbildung 3.11 zeigt die Faltungsrichtung α für eine Membran aus isotropem bzw. orthotropem Material mit $f = 10$ und $f = 20$. Wie bei der isotropen Membran wächst das Faltenmaß β zunächst an, sinkt jedoch bei großen Dehnungen wieder ab. Es gibt einen Übergang vom gefalteten Zustand zum straffen Zustand. Dies kann wieder mit der Querkontraktion der Membran erklärt werden. Der Übergang geschieht bei einer Eckpunktverschiebung von $v = 42 \text{ mm}$ für ($f = 10$) und bei $v = 30 \text{ mm}$ für ($f = 20$).

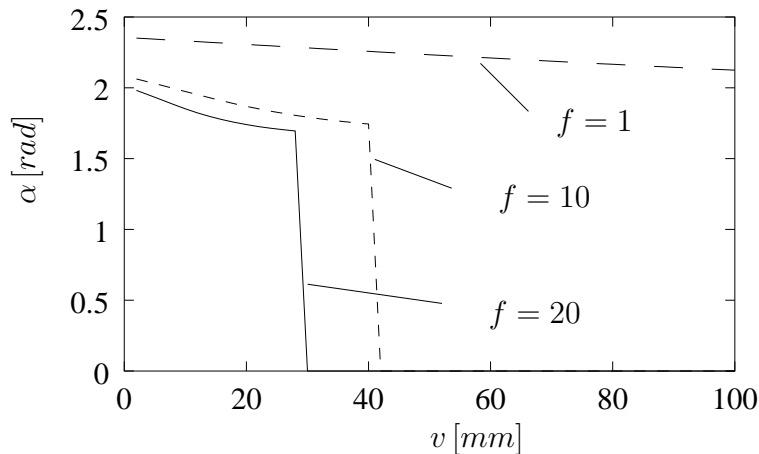


Abbildung 3.11: Einfache Scherung, Faltungsrichtung bei variiertem Orthotropieparameter f

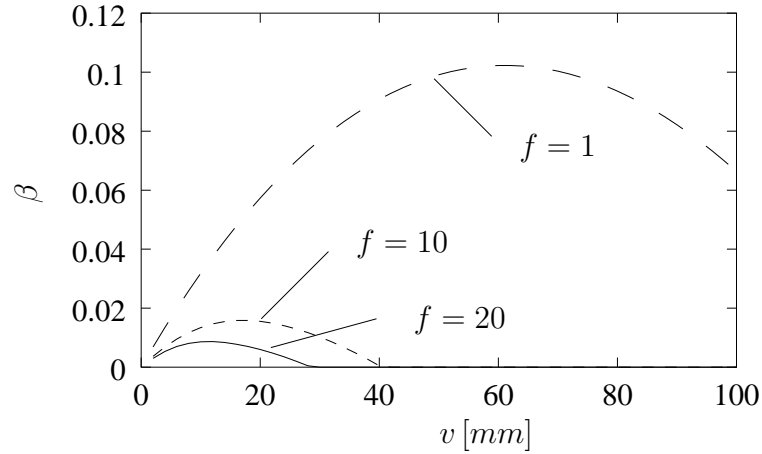


Abbildung 3.12: Einfache Scherung, das Faltenmaß β bei variiertem Orthotropieparameter f

3.7.2 Einfache Scherung bei nichtlinearem, orthotropem Material

Eine Membran aus nichtlinearem, orthotropem Material (siehe Abschnitt 9.6.2) wird betrachtet. Die 13 Materialkonstanten a_1 bis a_{12} und G sind

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 4.5833788617464097 \cdot 10^3 \text{ N/mm} \\
 a_2 &= 5.3246302438914472 \cdot 10^3 \text{ N/mm} \\
 a_3 &= 4.7373511015620670 \cdot 10^3 \text{ N/mm} \\
 a_4 &= 2.3829785670827889 \cdot 10^4 \text{ N/mm} \\
 a_5 &= 2.6911041299716388 \cdot 10^4 \text{ N/mm} \\
 a_6 &= 2.6804476706876583 \cdot 10^4 \text{ N/mm} \\
 a_7 &= 2.7628374255494393 \cdot 10^4 \text{ N/mm} \\
 a_8 &= 1.1694449446391579 \cdot 10^5 \text{ N/mm} \\
 a_9 &= 1.8425863486021743 \cdot 10^5 \text{ N/mm} \\
 a_{10} &= 3.3106277485927223 \cdot 10^5 \text{ N/mm} \\
 a_{11} &= 1.1316881082253151 \cdot 10^5 \text{ N/mm} \\
 a_{12} &= 9.8739830023017115 \cdot 10^4 \text{ N/mm} \\
 G &= 200.00 \text{ N/mm}
 \end{aligned}$$

Dieses Material war während eines frühen Entwicklungsstadiums in der Auswahl für einen Luftschiffentwurf. Für den Test des Faltenalgorithmus soll es hier zur Anwendung kommen. Das nichtlineare Material zeigt das aus den voran gegangenen Untersuchungen bereits bekannte Verhalten. Allerdings tritt der Übergang vom gefalteten in den straffen Zustand bereits sehr früh ein. Verläufe der Faltungsrichtung α und des Faltenmaßes β sind in Abbildung 3.13 bzw. 3.14 dargestellt. Bei allen Berechnungen

erwies sich der Faltenalgorithmus als sehr robust. Numerische Probleme traten nicht auf.

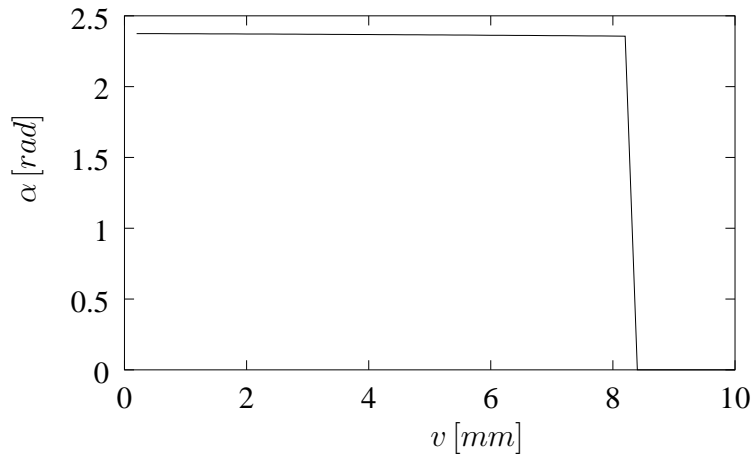


Abbildung 3.13: Einfache Scherung, Faltungsrichtung für ein nichtlineares Material

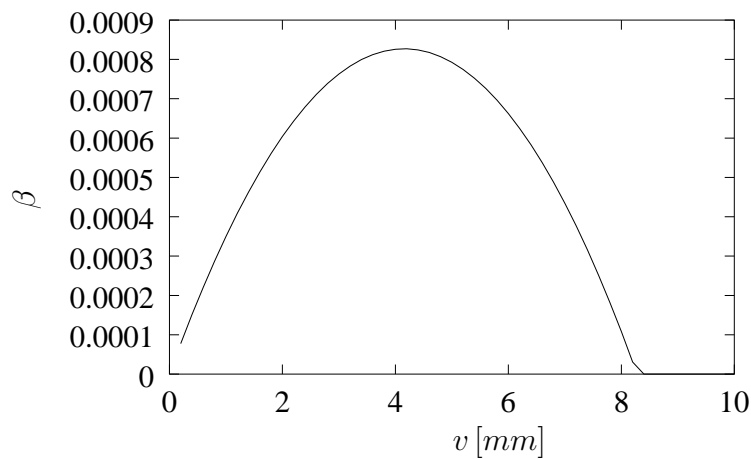


Abbildung 3.14: Einfache Scherung, Faltenmaß β für ein nichtlineares Material

3.8 Faltenalgorithmus mit 3D-Materialgesetz

Bei den bisherigen Betrachtungen wurde das Materialverhalten der Membran mit einer 2D-Formulierung beschrieben, d.h. mit einer Beziehung zwischen planaren Dehnungen $D_{\alpha\beta}$ und Membrankräften $S_{\alpha\beta}$. Die Bedingung des ebenen Spannungszustandes (ESZ) war a priori erfüllt. In einigen Fällen (siehe z.B. Kapitel 9.6) liegt das Materialgesetz jedoch in einer 3D-Form vor. Im weiteren erfolgt die Beschreibung des Materi-

als mit den dreidimensionalen Greenschen Dehnungen D_{ij} und den 2. Piola Kirchhoff Spannungen T_{ij} (siehe Gleichung 9.27) wobei $i, j = 1, 2, 3$ gilt.

In diesem Falle ist Bedingung des ebenen Spannungszustandes $T'_{33} = 0$ nicht ohne Weiteres erfüllt. Neben den Faltenbedingungen ist somit auch noch die ESZ-Bedingung zu befriedigen. Die Faltenbedingungen selber werden mit den planaren Spannungen $T_{\alpha\beta}$ formuliert. Für den Dehnungszustand einer Membran gilt

$$D_{ij} \hat{=} \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Die Problemformulierung erfolgt nun für die Größen α , β und die Dickenverzerrung¹ $D = D'_{33}$.

$$f_1(\alpha, \beta, D) = \frac{T'_{11} + T'_{22}}{2} + \frac{T'_{11} - T'_{22}}{2} \cos 2\alpha + T'_{12} \sin 2\alpha = 0 \quad (3.62)$$

$$f_2(\alpha, \beta, D) = -\frac{T'_{11} - T'_{22}}{2} \sin 2\alpha + T'_{12} \cos 2\alpha = 0 \quad (3.63)$$

$$f_3(\alpha, \beta, D) = T'_{33} = 0 \quad (3.64)$$

Die Dickenverzerrung D wird in diesem Zusammenhang als von α und β unabhängig aufgefaßt. Die Lösung des nicht linearen Gleichungssystems erfolgt wie in Abschnitt 3.5 mit dem Newton Verfahren. Die Inkremente $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ und ΔD ergeben sich aus dem lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} f_{1,\alpha} & f_{1,\beta} & f_{1,D} \\ f_{2,\alpha} & f_{2,\beta} & f_{2,D} \\ f_{3,\alpha} & f_{3,\beta} & f_{3,D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \\ \Delta D \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

Die Komponenten der Jacobi Matrix lauten:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f_1}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T'_{11}}{\partial D'_{\gamma\delta}} + \frac{\partial T'_{22}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T'_{11}}{\partial D'_{\gamma\delta}} - \frac{\partial T'_{22}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} \cos(2\alpha) + \\ &+ \frac{\partial T'_{12}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} \sin(2\alpha) + f_2 \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial f_2}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial T'_{11}}{\partial D'_{\gamma\delta}} - \frac{\partial T'_{22}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} \sin(2\alpha) + \frac{\partial T'_{12}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} \cos(2\alpha) + \\ &- \frac{1}{2} (T'_{11} - T'_{22}) \cos(2\alpha) - T'_{12} \sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (3.67)$$

¹Aufgrund der Faltenkorrektur der planaren Dehnungen sind bei gefordertem ebenen Spannungszustand die zugehörigen Dickenverzerrungen D_{33} und D'_{33} nicht identisch.

$$\frac{1}{2} \frac{\partial f_3}{\partial \alpha} = \frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha} \quad (3.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \beta} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T'_{11}}{\partial D'_{\gamma\delta}} + \frac{\partial T'_{22}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T'_{11}}{\partial D'_{\gamma\delta}} - \frac{\partial T'_{22}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} \cos(2\alpha) + \\ & + \frac{\partial T'_{12}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} \sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \beta} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial T'_{11}}{\partial D'_{\gamma\delta}} - \frac{\partial T'_{22}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \right) \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} \sin(2\alpha) + \frac{\partial T'_{12}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} \cos(2\alpha) \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \beta} = \frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta} \quad (3.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial D} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T'_{11}}{\partial D'_{33}} + \frac{\partial T'_{22}}{\partial D'_{33}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial T'_{11}}{\partial D'_{33}} - \frac{\partial T'_{22}}{\partial D'_{33}} \right) \cos(2\alpha) + \\ & + \frac{\partial T'_{12}}{\partial D'_{33}} \sin(2\alpha) \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial D} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial T'_{11}}{\partial D'_{33}} - \frac{\partial T'_{22}}{\partial D'_{33}} \right) \sin(2\alpha) + \frac{\partial T'_{12}}{\partial D'_{33}} \cos(2\alpha) \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial D} = \frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{33}} \quad (3.74)$$

Für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial 2\alpha}$ und $\frac{\partial D'_{\gamma\delta}}{\partial \beta}$ gelten wieder die Gleichung 3.50 bzw. 3.51. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial T'_{ij}}{\partial D'_{kl}}$ sind hier die Materialsteifigkeiten, die mit den Membransteifigkeiten $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$ nicht identisch sind.

Die konsistente Linearisierung für den FE-Algorithmus erfolgt in der selben Art und Weise wie in Abschnitt 3.6. Hierzu werden die Materialsteifigkeiten $\frac{\partial T'_{ij}}{\partial D'_{kl}}$ auf den ebenen Spannungszustand umgerechnet.

Die ESZ-Materialsteifigkeiten erhält man mit Standardtechniken der konsistenten Linearisierung. Da der ebene Spannungszustand

$$T'_{33} = 0 \quad (3.75)$$

gefordert wird, ist nun die Dickenverzerrung D'_{33} keine unabhängige Größe mehr. Die Änderung von T'_{33} bei einer Änderung des planaren Dehnungszustandes muß verschwinden, da immer die Gleichung 3.75 gilt. In anderen Worten: das totale Differential dT'_{33} ist Null.

$$dT'_{33} = \frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{kl}} dD'_{kl} = \frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{\alpha\beta}} dD'_{\alpha\beta} + \frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{33}} dD'_{33} = 0 \quad (3.76)$$

Hierbei wurde der Dehnungszustand der Membran (Gleichung 3.61) bereits berücksichtigt. Somit lautet das totale Differential der Dickenverzerrung

$$dD'_{33} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{33}}\right)} \frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{\alpha\beta}} dD'_{\alpha\beta} \quad (3.77)$$

Mit dieser Beziehung kann dD'_{33} aus den totalen Differentialen der planaren Spannungen

$$dT'_{\alpha\beta} = \frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial D'_{kl}} dD'_{kl} = \frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial D'_{\gamma\delta}} dD'_{\gamma\delta} + \frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial D'_{33}} dD'_{33} \quad (3.78)$$

eliminiert werden und es ergibt sich

$$dT'_{\alpha\beta} = \left[\frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial D'_{\gamma\delta}} - \frac{1}{\frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{33}}} \frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial D'_{33}} \frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \right] dD'_{\gamma\delta} \quad (3.79)$$

Aus Gleichung 3.79 folgt mit Gleichung 9.29 die Membransteifigkeit \mathbb{C} (h ist die Membrandicke).

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial S'_{\alpha\beta}}{\partial D'_{\gamma\delta}} = h \left[\frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial D'_{\gamma\delta}} - \frac{1}{\frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{33}}} \frac{\partial T'_{\alpha\beta}}{\partial D'_{33}} \frac{\partial T'_{33}}{\partial D'_{\gamma\delta}} \right] \quad (3.80)$$

Diese Membransteifigkeit muß verwendet werden, um die Ableitungen der Membrankräfte nach den Dehnungen der mittleren Lage $\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{D}')}{\partial \mathbf{D}}$ zu ermitteln.

Kapitel 4

Faltung bei linearem Materialverhalten

Die Faltenbedingungen sind gekoppelte, nichtlineare Gleichungen, deren Lösung im allgemeinen nur numerisch erfolgen kann. Ein weitgehend analytischer Zugang kann jedoch für den Fall einer linearen Beziehung zwischen Membrankräften und den Dehnungen gefunden werden. In diesem Kapitel wird für den Fall linearen Materialverhaltens eine Bestimmungsgleichung für die Faltungsrichtung α formuliert. Dies ist möglich, da sich das Faltenmaß β eliminieren läßt. Bereits in [18] wurde von dieser Möglichkeit Gebrauch gemacht. In dieser Arbeit wird die Bestimmungsgleichung für α als Gleichung vierten Grades formuliert. Hierdurch wird ein weitgehend analytischer Zugang zur Faltenproblematik möglich. Einige Beispiele werden analysiert.

Es soll hier die vektorielle Formulierung der Faltenbedingung verwendet werden.

$$\mathbf{N} \cdot \mathbf{S}' = 0 \quad (4.1)$$

Bei Anwendung der Faltenkinematik 3.14 auf das Materialgesetz 9.47 kann eine Aufspaltung des Membrankrafttensors \mathbf{S}' in einen unkorrigierten Anteil und einen Faltenanteil vorgenommen werden:

$$\mathbf{S}' = \mathbb{C} \cdot \cdot \mathbf{D} + \mathbb{C} \cdot \cdot \beta \mathbf{N} \circ \mathbf{N} = \mathbf{S} + \mathbb{C} \cdot \cdot \beta \mathbf{N} \circ \mathbf{N} \quad (4.2)$$

Die Faltenbedingung 4.1 kann ebenfalls in entsprechende Anteile zerlegt werden.

$$\underbrace{\mathbf{N} \cdot \mathbf{S}}_{\mathbf{a}} + \beta \underbrace{\mathbf{N} \cdot \mathbb{C} \cdot \cdot \mathbf{N} \circ \mathbf{N}}_{\mathbf{b}} = 0 \quad (4.3)$$

Mit den eingeführten Abkürzungen lautet die Faltenbedingung also

$$\mathbf{a} + \beta \mathbf{b} = 0 \quad (4.4)$$

4.1 Die Faltungsrichtung α

Wegen $\beta > 0$ müssen die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} antiparallel sein, d.h. es muß in jedem Fall

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

gelten. Die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} liegen in der Referenzebene. Bei der Bildung des Kreuzproduktes sind die Anteile in \mathbf{e}_1 -Richtung und \mathbf{e}_2 -Richtung a priori Null. Nun muß zusätzlich auch noch die \mathbf{e}_3 -Komponente verschwinden:

$$\begin{aligned} 0 &= a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ 0 &= (N_\alpha S_{\alpha 1}) \left(N_\beta \hat{C}_{\beta 2 \gamma \delta} N_\gamma N_\delta \right) - (N_\alpha S_{\alpha 2}) \left(N_\beta \hat{C}_{\beta 1 \gamma \delta} N_\gamma N_\delta \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Führt man alle Operationen aus, sortiert nach Potenzen von N_1 und N_2 und nutzt die Symmetrie des Membrankrafttensors und des Elastizitätstensors aus, so bekommt Gleichung 4.6 diese Form:

$$\begin{aligned} 0 = & N_1^4 \{S_{11} C_{1211} - S_{12} C_{1111}\} + \\ & + N_1^3 N_2 \{S_{11} (2C_{1212} + C_{2211}) + S_{12} (C_{1211} - 2C_{1112} - C_{2111}) - S_{22} C_{1111}\} \\ & + N_1^2 N_2^2 \{S_{11} (C_{1222} + 2C_{2212}) - S_{22} (2C_{1112} + C_{2111}) \\ & \quad + S_{12} (2C_{1212} + C_{2211} - C_{1122} - 2C_{2112})\} \\ & + N_1 N_2^3 \{S_{11} C_{2222} + S_{12} (C_{1222} + 2C_{2212} - C_{2122}) - S_{22} (C_{1122} + 2C_{2112})\} \\ & + N_2^4 \{S_{12} C_{2222} - S_{22} C_{2122}\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Es ist an dieser Stelle zweckmäßig auf die Voigt Notation (siehe Gleichung 9.50, 9.51 und 9.52) überzugehen. Die Vektorkomponenten von \mathbf{N} sind $N_1 = \cos \alpha$ und $N_2 = \sin \alpha$.

$$\begin{aligned} 0 = & \cos(\alpha)^4 \{ \sigma_1 V_{13} - \tau V_{11} \} + \\ & + \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) \{ \sigma_1 (2V_{33} + V_{12}) - 2\tau V_{13} - \sigma_2 V_{11} \} + \\ & + \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 \{ 3\sigma_1 V_{23} - 3\sigma_2 V_{13} \} + \\ & + \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 \{ \sigma_1 V_{22} + 2\tau V_{23} - \sigma_2 (2V_{33} + V_{12}) \} + \\ & + \sin(\alpha)^4 \{ \tau V_{22} - \sigma_2 V_{23} \} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Koeffizienten der trigonometrischen Ausdrücke werden mit k_0 bis k_4 abgekürzt.

$$k_0 = \{ \sigma_1 V_{13} - \tau V_{11} \} \quad (4.9)$$

$$k_1 = \{ \sigma_1 (2V_{33} + V_{12}) - 2\tau V_{13} - \sigma_2 V_{11} \} \quad (4.10)$$

$$k_2 = \{ 3\sigma_1 V_{23} - 3\sigma_2 V_{13} \} \quad (4.11)$$

$$k_3 = \{ \sigma_1 V_{22} + 2\tau V_{23} - \sigma_2 (2V_{33} + V_{12}) \} \quad (4.12)$$

$$k_4 = \{ \tau V_{22} - \sigma_2 V_{23} \} \quad (4.13)$$

Mit den eingeführten Abkürzungen lautet Gleichung 4.8 nun

$$k_0 \cos(\alpha)^4 + k_1 \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) + k_2 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2 + k_3 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 + k_4 \sin(\alpha)^4 = 0 \quad (4.14)$$

Multipliziert man Gleichung 4.14 mit $\frac{1}{\cos(\alpha)^4}$ und substituiert $\xi = \tan(\alpha)$, so bekommt man eine Gleichung 4. Ordnung (der Fall $\cos \alpha = 0$ bzw. $k_4 = 0$ wird in Kapitel 4.3.1 gesondert diskutiert).

$$k_0 + k_1 \xi + k_2 \xi^2 + k_3 \xi^3 + k_4 \xi^4 = 0 \quad (4.15)$$

Diese Gleichung 4. Ordnung für ξ kann prinzipiell analytisch gelöst werden. Die Lösung der Gleichung 4.15 gibt Aufschluß über die Faltungsrichtung. Man muß allerdings beachten, daß die Lösung nicht eindeutig ist. Zum einen, da Gleichung 4.15 vier Lösungen besitzt. Zum anderen, da sich eine Mehrdeutigkeit der Lösung durch die Substitution $\xi = \tan(\alpha)$ ergibt. Die richtige Lösung des Faltenproblems muß

1. $\beta > 0$
2. $\sigma_{II} = 0$ und $\sigma_I > 0$ (positive Hauptmembrankraft)

gewährleisten. Selbstverständlich muß für eine physikalisch sinnvolle Lösung ξ reell sein.

4.2 Das Faltungsmaß β

Da hier ein linear elastisches Material betrachtet wird, tritt das Faltungsmaß β in der Faltenbedingung 4.3 als ein linearer Faktor auf. Das Faltenmaß β kann somit bei bekannter Faltungsrichtung leicht ermittelt werden. Dazu wird die Vektorgleichung 4.3 mit dem Vektor \mathbf{N} skalar multipliziert.

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} + \beta \mathbf{N} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{N} \circ \mathbf{N} \cdot \mathbf{N} \quad (4.16)$$

Die Gleichung 4.16 lautet in Indexschreibweise

$$N_\gamma N_\delta S_{\gamma\delta} + \beta N_\kappa N_\lambda N_\mu N_\nu C_{\kappa\lambda\mu\nu} = 0 \quad (4.17)$$

Durch einfache Umformungen erhält man das Faltenmaß

$$\beta = - \frac{N_\gamma N_\delta S_{\gamma\delta}}{N_\kappa N_\lambda N_\mu N_\nu C_{\kappa\lambda\mu\nu}} \quad (4.18)$$

bzw. bei Verwendung der Voigt-Notation

$$\beta = - \frac{\sigma_1 N_1^2 + \sigma_2 N_2^2 + 2\tau N_1 N_2}{V_{11} N_1^4 + V_{22} N_2^4 + 2(2V_{33} + V_{12}) N_1^2 N_2^2 + 4V_{13} N_1^3 N_2 + 4V_{23} N_1 N_2^3} \quad (4.19)$$

4.3 Analytische Lösungen der Faltenbedingung

Für ein lineares Material können die Faltungsrichtung α und das Faltenmaß β im Prinzip analytisch bestimmt werden. Die Faltungsrichtung α folgt aus einer Lösung von Gleichung 4.15. In [7] sind die Lösungen einer Gleichung 4. Ordnung angegeben. Da diese Lösungen für allgemeine Fälle nur schwer zu notieren sind, wurden sie in Fortran implementiert. Für nichtlinear elastische Membranen können die so gewonnenen Werte für α und β als Vorschätzung für das Newton Verfahren dienen. Im folgenden werden einige Spezialfälle untersucht.

4.3.1 Sonderfälle verschwindender Koeffizienten k_0 bzw. k_4

$k_4 = 0$: Für den Übergang von Gleichung 4.14 nach Gleichung 4.15 wurde $k_4 \neq 0$ gefordert. Dies stellt sicher, daß $\cos(\alpha) = 0$ keine Lösung von Gleichung 4.14 sein kann. Bei $k_4 = 0$ wird Gleichung 4.14 zu

$$0 = \cos(\alpha) \{ k_0 \cos(\alpha)^3 + k_1 \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) + k_2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)^2 + k_3 \sin(\alpha)^3 \} \quad (4.20)$$

Somit enthält $\cos(\alpha) = 0$ mögliche Lösungen, die auf ihre Zulässigkeit geprüft werden müssen. Weitere mögliche Lösungen ergeben sich aus der kubischen Gleichung, die aus Gleichung 4.20 resultiert.

$$k_0 + k_1 \xi + k_2 \xi^2 + k_3 \xi^3 = 0 \quad (4.21)$$

$k_0 = 0$: In diesem Fall kann Gleichung 4.15 als

$$\xi \{ k_1 + k_2 \xi + k_3 \xi^2 + k_4 \xi^3 \} = 0 \quad (4.22)$$

geschrieben werden. Mögliche Lösungen folgen aus $\xi = \tan(\alpha) = 0$ und aus der verbleibenden kubischen Gleichung. Die Lösung $\xi = \tan(\alpha) = 0$ kann für $k_0 = 0$ ohne Probleme aus der Gleichung 4. Ordnung 4.15 gewonnen werden. Deshalb sind im Gegensatz zum Fall $k_4 = 0$ hier keine zusätzlichen Überlegungen notwendig.

4.3.2 Isotrope Membran

Bei einem isotropen, linear elastischen Material (Kappus-Material) gilt für die Steifigkeitswerte der Voigt Matrix

$$\begin{aligned} V_{11} &= V_{22} = 2V_{33} + V_{12} = V_{iso} \\ V_{12} &= \nu V_{11} = \nu V_{22} = \nu V_{iso} \quad \text{sowie} \\ V_{13} &= V_{23} = 0 \end{aligned}$$

mit der Querkontraktionszahl ν . Das Problem vereinfacht sich dadurch erheblich. Gleichung 4.8 lautet nun nämlich

$$0 = \{\tau (\sin(\alpha)^4 - \cos(\alpha)^4) + (\sigma_1 - \sigma_2) (\cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3)\} V_{iso}$$

Aus dieser Gleichung erhält man nach Anwendung von einigen Additionstheoremen mit den Zwischenergebnissen

$$\sin(\alpha)^4 - \cos(\alpha)^4 = -\cos(2\alpha) \quad (4.23)$$

$$\cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) + \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \quad (4.24)$$

die Beziehung für die Faltungsrichtung α

$$0 = -\tau \cos(2\alpha) + (\sigma_1 - \sigma_2) \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \quad (4.25)$$

oder

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tau}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad (4.26)$$

Das heißt zum Ersten, daß die Faltungsrichtung unabhängig von der Membransteifigkeit ist, was man bei Isotropie auch erwarten kann, und zum Zweiten, daß die Faltungsrichtung α mit einer Hauptrichtung des Membrankrafttensors oder, wegen der Koaxialität bei Isotropie, des Dehnungstensors identisch ist. Aus Gleichung 4.19 resultiert der Faltenparameter β

$$\beta = -\frac{\sigma_1 \cos(\alpha)^2 + \sigma_2 \sin(\alpha)^2 + 2\tau \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{V_{iso} \{\cos(\alpha)^4 + \sin(\alpha)^4 + \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2\}} \quad (4.27)$$

$$= -\frac{\sigma_{II}}{V_{iso}} = -\varepsilon_{II} - \nu \varepsilon_I \quad (4.28)$$

dargestellt mit der Hauptmembrankraft σ_{II} , den Hauptdehnungen der mittleren Lage ε_I , ε_{II} und der Querkontraktionszahl ν . Dieses Ergebnis ist bereits aus [35] bekannt.

4.3.3 Orthotrope Membran

Es wird im weiteren ein lineares, orthotropes Material mit

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & 0 \\ V_{12} & V_{22} & 0 \\ 0 & 0 & V_{33} \end{bmatrix}$$

betrachtet. In der Gleichung 4.8 verschwindet der Koeffizient k_2 . Die restlichen Koeffizienten vereinfachen sich etwas und man erhält

$$k_0 + k_1 \xi + k_3 \xi^3 + k_4 \xi^4 = 0 \quad (4.29)$$

bzw.

$$\begin{aligned}
0 = & -\cos(\alpha)^4 \{\tau V_{11}\} + \\
& + \sin(\alpha)^4 \{\tau V_{22}\} + \\
& + \cos(\alpha)^3 \sin(\alpha) \{\sigma_1 (2V_{33} + V_{12}) - \sigma_2 V_{11}\} + \\
& + \cos(\alpha) \sin(\alpha)^3 \{\sigma_1 V_{22} - \sigma_2 (2V_{33} + V_{12})\}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Für eine allgemeine Lösung der Gleichung sind diese Vereinfachungen zwar unbedeutend, jedoch können einige Sonderfälle untersucht werden.

Zug und Druck in den Orthotropierichtungen: Für diesen Deformationszustand gilt $\gamma = 0$ bzw. $\tau = 0$. Die Richtungsgleichung 4.30 vereinfacht sich somit nochmals.

$$\begin{aligned}
0 = \cos(\alpha) \sin(\alpha) \{ & \cos(\alpha)^2 \{\sigma_1 (2V_{33} + V_{12}) - \sigma_2 V_{11}\} + \\
& + \sin(\alpha)^2 \{\sigma_1 V_{22} - \sigma_2 (2V_{33} + V_{12})\} & \}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Mögliche Faltungsrichtungen ergeben sich zunächst aus $\cos(\alpha) = 0$ und $\sin(\alpha) = 0$. Das entspricht den Winkeln $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \dots$. Der Faltenparameter β ist dann

$$\beta = -\frac{\sigma_1}{V_{11}} \quad \text{für } \sin(\alpha) = 0 \tag{4.32}$$

oder

$$\beta = -\frac{\sigma_2}{V_{22}} \quad \text{für } \cos(\alpha) = 0 \tag{4.33}$$

Da β positiv sein muß, ist die Druckrichtung also auch die Faltungsrichtung.

Zur Erfüllung der Richtungsgleichung 4.31 ist es ebenfalls denkbar, daß die rechte Klammer zu Null wird. Diese Lösungen scheinen unanschaulich¹. Das Problem ist bereits in [13] diskutiert worden.

Der Fall einer kombinierten Zug- und Druckbelastung einer orthotropen Membran wird an einem konkreten Beispiel betrachtet. Eine quadratische Membran der Breite $a = 100 \text{ mm}$ verformt sich entsprechend der in Grafik 4.1 gezeigten Weise. Bei einer zweiachsigen Streckung der Membran ergeben sich die Greenschen Verzerrungen

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{u+a}{a} \right)^2 - 1 \right] \tag{4.34}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v+a}{a} \right)^2 - 1 \right] \tag{4.35}$$

¹Zu beachten ist hierbei, daß der Faltenalgorithmus lediglich den einachsigen Membrankraftzustand sicherstellt und keinerlei Gleichgewichts- und Randbedingungen berücksichtigt.

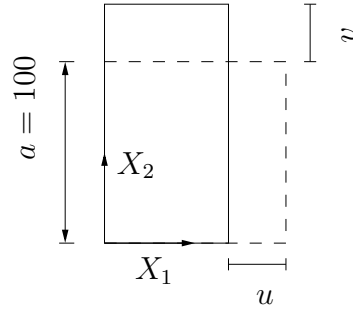


Abbildung 4.1: Deformationszustand der Membran

Für weitere Untersuchungen wird die Verschiebung $v = 10 \text{ mm}$ festgelegt. Die Verschiebung u ist variabel. Die Koordinatenachsen X_1 und X_2 sind zugleich die Orthotropierichtungen. Die Steifigkeitsmatrix ist

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} V_{11} & \frac{200}{3} \frac{N}{mm} & 0 \\ \frac{200}{3} \frac{N}{mm} & 200 \frac{N}{mm} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{200}{3} \frac{N}{mm} \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Im weiteren soll die Steifigkeit V_{11} variiert werden. Damit ist auch die Querkontraktionszahl

$$\nu_2 = \nu_1 \frac{V_{22}}{V_{11}} \quad (4.37)$$

variabel, während $\nu_1 = \frac{1}{3}$ gilt. Im vorliegenden Fall ist die Faltungsrichtung $\alpha = 0$. Der Faltenparameter β ist durch die Gleichung 4.32 festgelegt.

$$\beta = -\frac{\sigma_1}{V_{11}} = -(\varepsilon_{II} + \nu_2 \varepsilon_I) \quad (4.38)$$

Mit den Greenschen Verzerrungen 4.34 und 4.35 ist β dann

$$\beta = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{u+a}{a} \right)^2 - 1 \right] - \nu_2 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v+a}{a} \right)^2 - 1 \right] \quad (4.39)$$

Der Beginn der Faltung tritt bei einem u von

$$u_{(\beta=0)} = a \left[\sqrt{(1 + \nu_2) - \nu_2 \left(\frac{v+a}{a} \right)^2} - 1 \right] \quad (4.40)$$

auf. Die Steifigkeit V_{11} nimmt im folgenden Werte von 100 N/mm bis 400 N/mm an. Das entspricht einem Bereich der Querkontraktionszahl ν_2 von $1/6$ (bei $V_{11} = 400 \text{ N/mm}$) bis $2/3$ (bei $V_{11} = 100 \text{ N/mm}$). Abbildung 4.2 zeigt β in

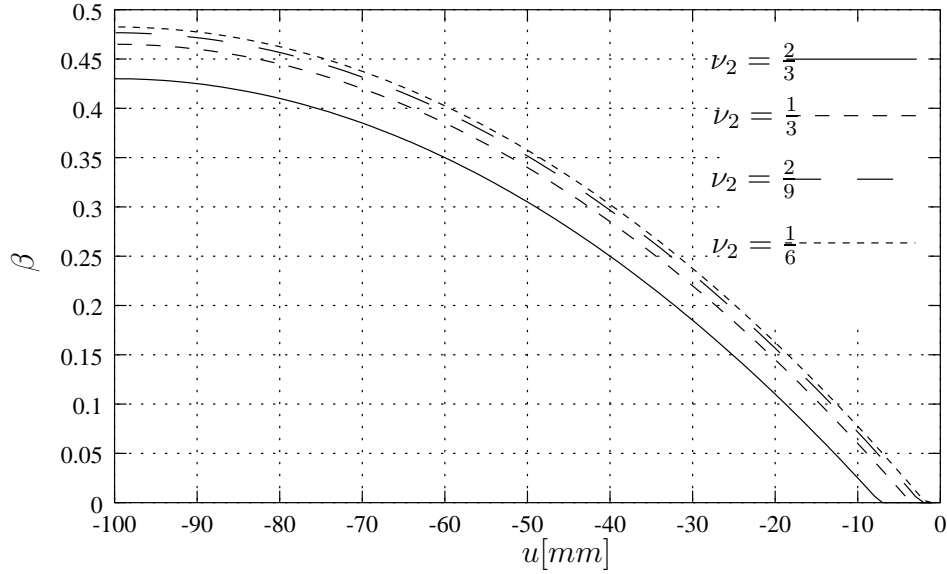


Abbildung 4.2: Membran unter zweiachsiger Belastung (Zug und Druck)

Abhängigkeit von der Verschiebung u . Die Querkontraktionszahl ν_2 ist hierbei ein Parameter. Aus der Grafik ist ersichtlich, daß die Faltung je eher beginnt, desto kleiner die Querkontraktionszahl ν_2 ist. Die Zahlenwerte für die Verschiebung $u_{(\beta=0)}$ sind

$$\begin{aligned} u_{(\beta=0)} &= -7.26 \text{ mm} && \text{für } \nu_2 = 2/3 \\ u_{(\beta=0)} &= -3.56 \text{ mm} && \text{für } \nu_2 = 1/3 \\ u_{(\beta=0)} &= -2.36 \text{ mm} && \text{für } \nu_2 = 2/9 \\ u_{(\beta=0)} &= -1.77 \text{ mm} && \text{für } \nu_2 = 1/6 \end{aligned}$$

Sucht man das lokale Extremum der Gleichung 4.39 auf, so sieht man, daß das Extremum wegen

$$\frac{d\beta}{du} = -\frac{1}{a} \left(\frac{u+a}{a} \right) = 0 \quad (4.41)$$

bei $u_{ex} = -a$ auftritt und zwar unabhängig von den Materialwerten. Es wird darauf hingewiesen, daß bei diesem Verformungsprozeß große unkorrigierte Dehnungen auftreten, die korrigierten Dehnungen jedoch sehr klein sind. Die korrigierte Dehnung ε'_1 ist

$$\varepsilon'_1 = \varepsilon_1 + \beta \quad (4.42)$$

$$= -\nu_2 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v+a}{a} \right)^2 - 1 \right] \quad (4.43)$$

Bei den gegebenen Werten $a = 100 \text{ mm}$, $v = 10 \text{ mm}$ und $\nu_2 = \frac{1}{6} \dots \frac{2}{3}$ liegen die

korrigierten Dehnungen

$$\varepsilon'_1 = -\nu_2 \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v+a}{a} \right)^2 - 1 \right] = -\nu_2 0.105 \quad (4.44)$$

im Bereich von $\varepsilon'_1 = -0.07$ und $\varepsilon'_1 = -0.0175$.

Reiner Schub: Die Membran wird durch eine reine Schubverformung deformiert, d.h. es gilt $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Das Materialgesetz 9.53 mit den Orthotropieachsen \mathbf{e}_1 und \mathbf{e}_2 wird verwendet. Da es keinerlei Normaldehnungen gibt, gilt zugleich $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$.

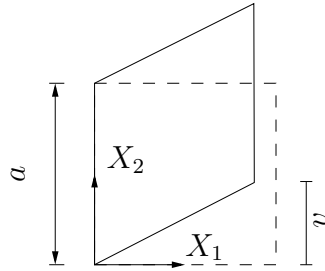


Abbildung 4.3: Reine Schubverformung einer quadratischen Membran

Die Gleichung 4.30 erhält dadurch eine sehr einfache Form.

$$0 = \sin(\alpha)^4 \{ \tau V_{22} \} - \cos(\alpha)^4 \{ \tau V_{11} \} \quad (4.45)$$

Die Faltungsrichtung α kann aus der Beziehung

$$\tan(\alpha)^4 = \frac{V_{11}}{V_{22}} \quad (4.46)$$

ermittelt werden. Den Faltenparameter β bestimmt man mit Gleichung 4.19, die sich im vorliegenden Fall wie folgt vereinfacht

$$\beta = \frac{-2V_{33}\gamma \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{V_{11} \cos(\alpha)^4 + V_{22} \sin(\alpha)^4 + 2(2V_{33} + V_{12}) \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha)^2} \quad (4.47)$$

Über das Vorzeichen von β und damit über die Zulässigkeit der Faltenrichtung α entscheidet übrigens nur der Term

$$-\gamma \cos(\alpha) \sin(\alpha) \quad (4.48)$$

im Zähler des Bruchs. Dieses Beispiel soll an einem konkreten Deformationszustand untersucht werden. Es wird eine quadratische Membran mit $a = 100 \text{ mm}$ (siehe Abbildung 4.3) betrachtet. Der Dehnungszustand in der Membran ist

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0 \quad (4.49)$$

$$\gamma = \frac{v}{a} \quad (4.50)$$

Die Materialwerte entsprechen denen aus Gleichung 4.36. Hier wird zunächst $V_{11} = 100 \text{ N/mm}$ gesetzt und die Scherverschiebung in einem Bereich $v = 0 \text{ mm}$ bis $v = 50 \text{ mm}$ variiert. Die Faltungsrichtung ist $\alpha = 2.4424 \text{ rad} \approx 139.9^\circ$. Abbildung 4.4 gibt die Roddemansche Faltungsrichtung α_R nach Gleichung 3.22 und das referenzbezogene Richtungsmaß α wieder. Der referenzbezogene Winkel α ist bei einer

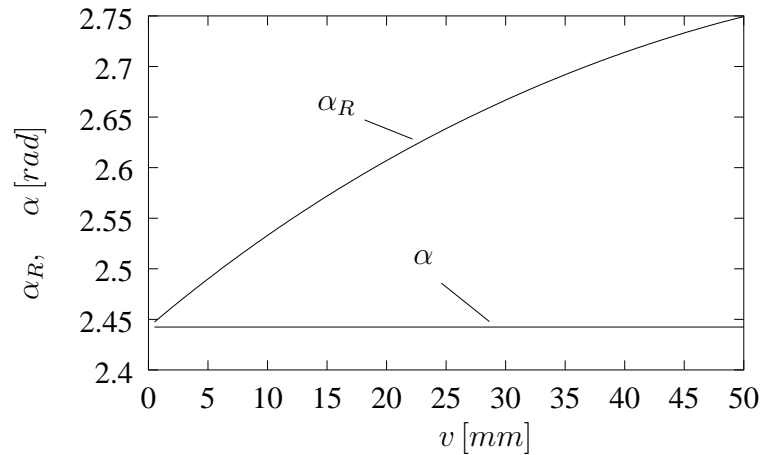


Abbildung 4.4: Reine Scherung, Faltungsrichtungen α und α_R bei $V_{11} = 100 \text{ N/mm}$

reinen Scherung weitgehend unabhängig vom Schubwinkel γ (siehe Gleichung 4.46). Lediglich das Vorzeichen von γ geht hier mit ein (siehe Gleichung 4.47). Die tatsächliche Faltungsrichtung α_R wächst mit zunehmendem Schubwinkel, was plausibel ist. In Abbildung 4.5 ist dieses Phänomen veranschaulicht. Gleichung 4.47 zeigt eine lineare Abhängigkeit des Faltenparameters β von γ und somit von v . In Abbildung 4.6 wird dieses Verhalten deutlich.

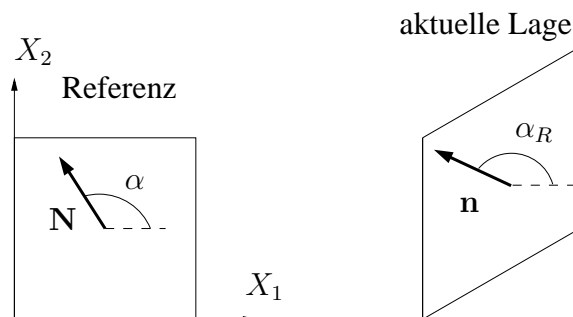
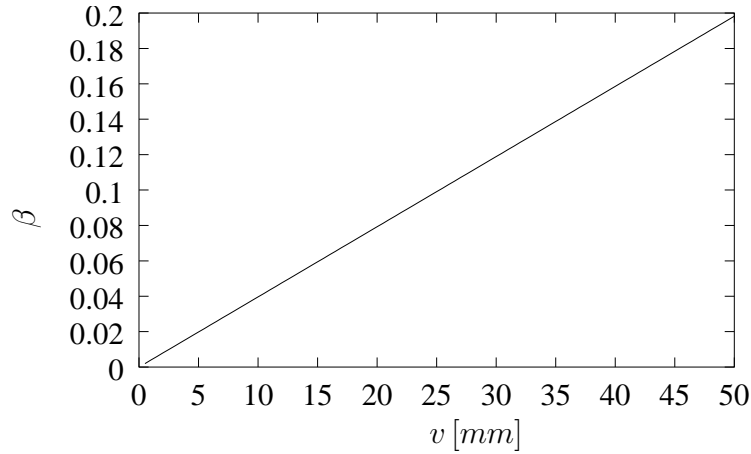
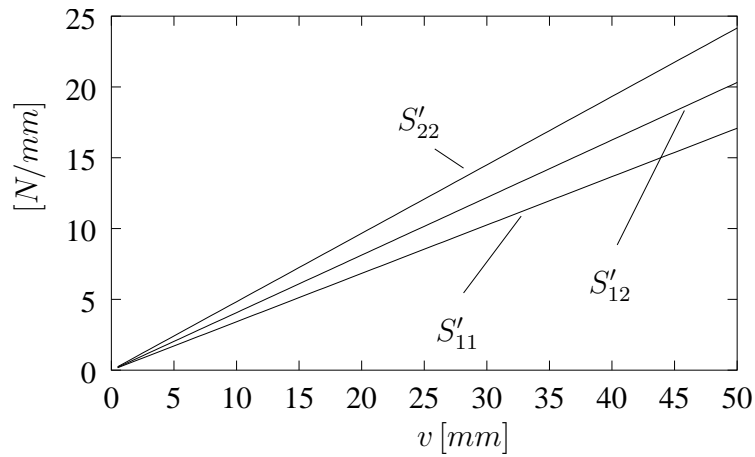


Abbildung 4.5: Illustration der Faltungsrichtungen α und α_R bei reiner Scherung

Abbildung 4.6: Reine Scherung, Faltenmaß β bei $V_{11} = 100 \text{ N/mm}$

Die Membrankräfte sind in Abbildung 4.7 dargestellt. Bei homogener Faltung treten trotz $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ Normalkräfte auf, die einen einachsigen Membrankraftzustand erzeugen.

Abbildung 4.7: Reine Scherung, Membrankräfte bei Faltung für $V_{11} = 100 \text{ N/mm}$

Die Abbildungen 4.8 und 4.9 zeigen die Abhängigkeit der Faltungsrichtung α bzw. des Faltenmaßes β vom Steifigkeitsquotienten $\frac{V_{11}}{V_{22}}$.

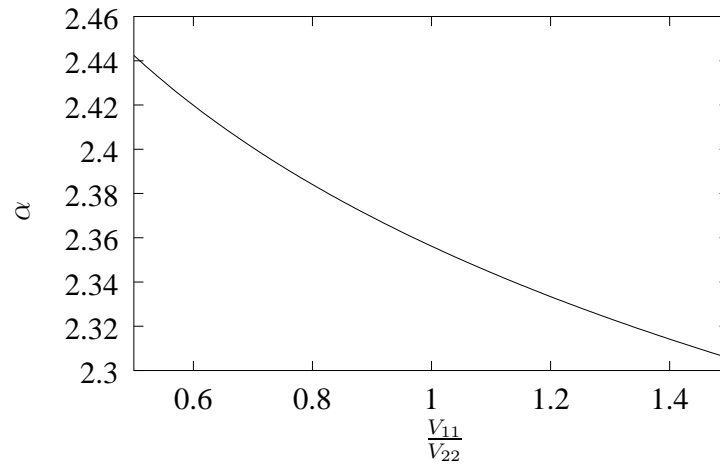


Abbildung 4.8: Reine Scherung, Faltungsrichtung α in Abhängigkeit vom Steifigkeitsquotienten $\frac{V_{11}}{V_{22}}$

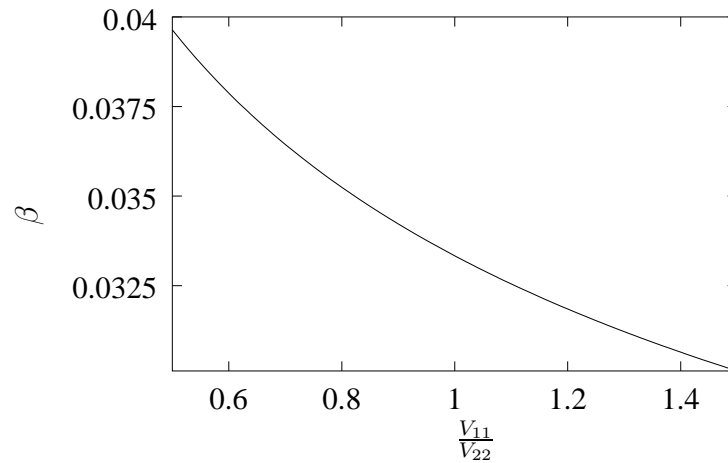


Abbildung 4.9: Reine Scherung, Faltenmaß β in Abhängigkeit vom Steifigkeitsquotienten $\frac{V_{11}}{V_{22}}$

Kapitel 5

Faltung bei inelastischem Materialverhalten

Treten in einer Membran inelastische Dehnungen auf, so kann das Einfluß auf den Faltungszustand haben. Die Ermittlung des Membrankraftzustandes bei inelastischem, insbesondere elastisch-plastischem Materialverhalten soll Gegenstand dieses Kapitels sein. In den Faltenbedingungen sowohl in Roddemanscher Formulierung (Gleichung 3.3) als auch in der referenzbezogenen Darstellung (Gleichungen 3.32 und 3.34) sind keine Annahmen bezüglich des Materialverhaltens enthalten. Diese Bedingungen bleiben also unverändert gültig. Allerdings muß bei Auftreten von bleibenden Verzerrungen das Faltenkriterium aus Kapitel 3.1 neu formuliert werden. Ebenso muß der Wahl geeigneter Startwerte für die Newton Iteration besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden, um numerische Probleme zu vermeiden. In diesem Kapitel wird eine Methode zur Ermittlung der Startwerte vorgestellt, die sich als effizient erwiesen hat.

5.1 Plastische Deformation einer Membran

In dieser Arbeit wird das Konzept einer Zwischenkonfiguration (siehe Kapitel 9.6.3) verwendet. Der Deformationsgradient der Membran \mathbf{F} wird in einen plastischen Anteil $\hat{\mathbf{F}}$ und einen elastischen Anteil \mathbf{F}_e aufgespalten (siehe Abbildung 5.1). Das geschieht in Analogie zur multiplikativen Zerlegung in Kapitel 9.6.3:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad (5.1)$$

Es werden die rechten Cauchy Green Strecktensoren und Greenschen Verzerrungstensoren der plastischen Deformation

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad (5.2)$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{C}} - \mathbf{E}) \quad (5.3)$$

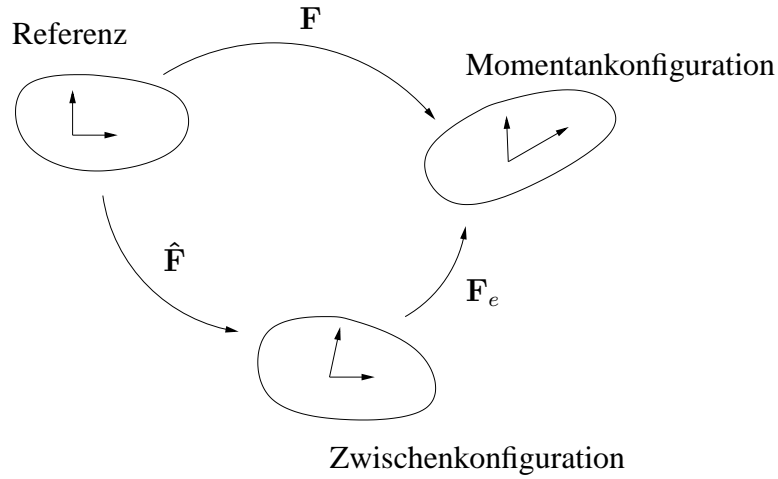


Abbildung 5.1: Die Kinematik elastisch-plastischer Deformation einer Membran

sowie der elastischen Deformation

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e \quad (5.4)$$

$$\mathbf{D}_e = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_e - \mathbf{E}) \quad (5.5)$$

eingeführt. Zwischen diesen Größen besteht der Zusammenhang

$$\mathbf{C} = \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{C}_e \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad (5.6)$$

$$\mathbf{D} = \hat{\mathbf{D}} + \hat{\mathbf{F}}^T \cdot \mathbf{D}_e \cdot \hat{\mathbf{F}} \quad (5.7)$$

Aus den Beziehungen der Invarianten für die 3D-Verzerrungen Gleichung 9.73 und 9.74 können analoge Beziehungen für die planaren Verzerrungen abgeleitet werden. Somit gilt

$$I_1 = \mathbf{C}_e \cdot \cdot \mathbf{E} = (\hat{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \mathbf{C}) \cdot \cdot \mathbf{E} \quad (5.8)$$

$$I_2 = \mathbf{C}_e \cdot \cdot \mathbf{C}_e = (\hat{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \mathbf{C}) \cdot \cdot (\hat{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \mathbf{C}) \quad (5.9)$$

Diese rein geometrischen Beziehungen sind bei einer Neuformulierung des Faltenkriteriums für den Fall plastischer Dehnungen hilfreich.

In gleicher Weise kann die polare Zerlegung für den korrigierten Deformationsgradienten \mathbf{F}' (Gleichung 3.2) durchgeführt werden.

5.2 Faltenkriterium bei plastischen Deformationen

Die Frage, welcher Membranzustand sich bei einer vorgegebenen mittleren Lage einstellt, ist beim Auftreten von bleibenden Deformationen nicht ohne Weiteres zu beantworten. Das Faltenkriterium muß neu formuliert werden.

- Straffer Zustand: Zunächst bleibt gültig, daß die Membran straff ist, sofern die Hauptmembrankräfte größer Null sind, d.h. wenn gilt

$$S_I > 0 \quad \text{und} \quad S_{II} > 0 \quad (5.10)$$

- Schlaffer Zustand: Desweiteren wird angenommen, daß bei einem stabilen Materialverhalten die Membran einen schlaffen Zustand einnimmt, wenn ausschließlich elastische Stauchungen auftreten. Für die Hauptwerte von D_e bzw. C_e gilt somit

$$D_{e,I} < 0 \quad \text{und} \quad D_{e,II} < 0 \quad (5.11)$$

also

$$C_{e,I} < 1 \quad \text{und} \quad C_{e,II} < 1 \quad (5.12)$$

Zur Auswertung dieser Bedingung wird die Gleichheit der Invarianten von C_e und $\hat{C}^{-1} \cdot C$ ausgenutzt. Aus der Deformationsgeschichte sind die plastischen Verzerrungen \hat{C} der Membran bekannt. Die Cauchy Green Dehnungen C sind vorgegeben. Die Invarianten des planaren Tensors C_e bzw. $\hat{C}^{-1} \cdot C$ können mit den Gleichungen 5.8 und 5.9 berechnet werden. Als Invarianten eines planaren Tensors können auch der Radius r und der Mittelpunktswert M des Mohrschen Kreises aufgefaßt werden, d.h. Radius und Mittelpunkt des Mohrschen Kreises können mit den Invarianten I_1 und I_2 beschrieben werden:

$$M = \frac{1}{2} I_1 \quad (5.13)$$

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{2I_2 - I_1^2} \quad (5.14)$$

Die Hauptwerte von C_e kann man aus Abbildung 5.2 abgelesen:

$$C_{e,I} = M + r \quad C_{e,II} = M - r \quad (5.15)$$

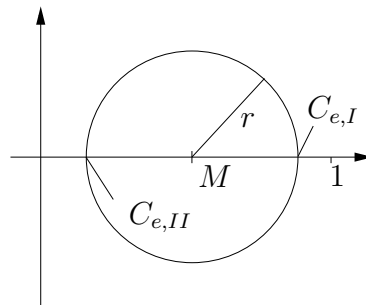


Abbildung 5.2: Mohrscher Dehnungskreis für C_e einer schlaffen Membran

Bei der praktischen Umsetzung dieser Betrachtungen, werden die planaren, inversen plastischen Verzerrungen $\hat{B}_{\alpha\beta}^A$ des letzten Lastschrittes (siehe Kapitel 9.6.3) und die neuen Cauchy Green Verzerrungen \hat{C} der mittleren Lage verwendet. Das ist eine pragmatische Näherung.

- Homogen gefaltete Membran: Homogene Faltung tritt auf, wenn die Membran weder straff noch schlaff ist.

5.3 Faltenbedingung

Die Faltenbedingung, d.h. die Forderung eines einachsigen Membrankraftzustandes, sowohl in der Roddemanschen als auch in der transformierten Form, bleiben auch bei inelastischem Materialverhalten im Prinzip unverändert gültig. Zu beachten ist, daß jetzt plastische Deformationen bei der Bestimmung des Membrankraftzustandes berücksichtigt werden müssen. Der Membrankraftzustand hängt vom plastischen Dehnungszustand \hat{C} und der über den Deformationsprozeß akkumulierten plastischen Dehnung $\hat{\varphi}$ (siehe Gleichung 9.84) ab:

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{D}', \hat{\varphi}, \hat{C}) \cdot \mathbf{N} \quad (5.16)$$

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{D}', \hat{\varphi}, \hat{C}) \cdot \mathbf{N}_{\perp} \quad (5.17)$$

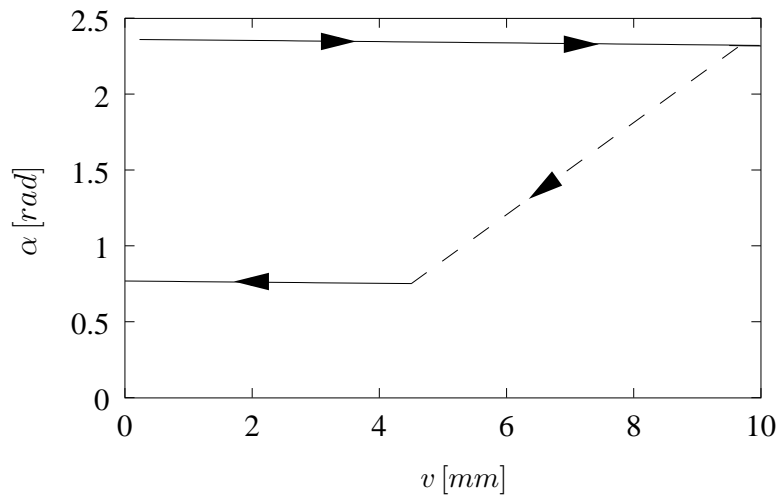
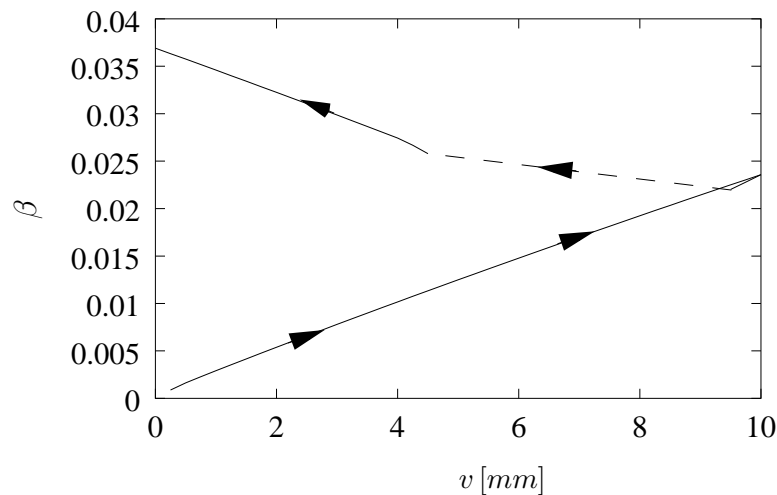
5.4 Beispiel: Einfache Scherung

Das Verhalten einer Membran unter einfacher Scherdeformation soll hier betrachtet werden. Die Geometriedaten entsprechen denen aus Kapitel 3.7. Das elastisch-plastische Materialgesetz aus Kapitel 9.6.3 mit dem Verfestigungsgesetz Gleichung 9.83 und der Faltenalgorithmus in der 3D-Formulierungen aus Kapitel 3.8 werden angewendet. In Kapitel 5.5 werden Hinweise zur Durchführung dieser Rechnung gegeben. Die Materialwerte sind

- E-Modul $E = 70000 \frac{N}{mm^2}$
- Querkontraktion $\nu = 0.3$
- Fließdehnung $y_0 = 0.002$

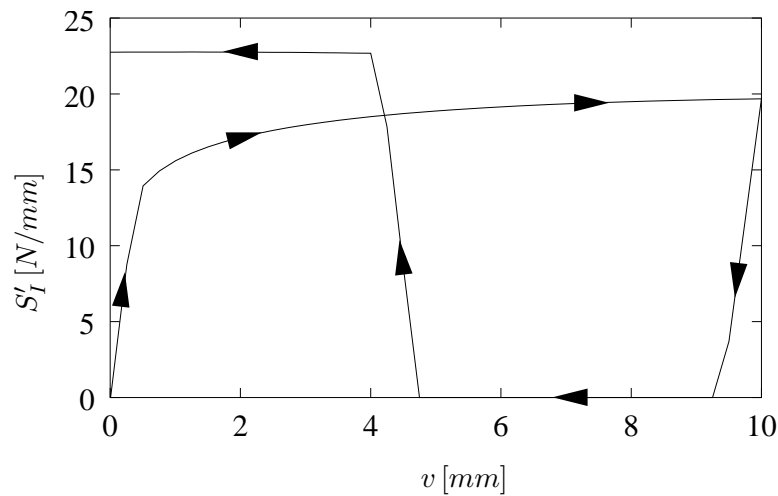
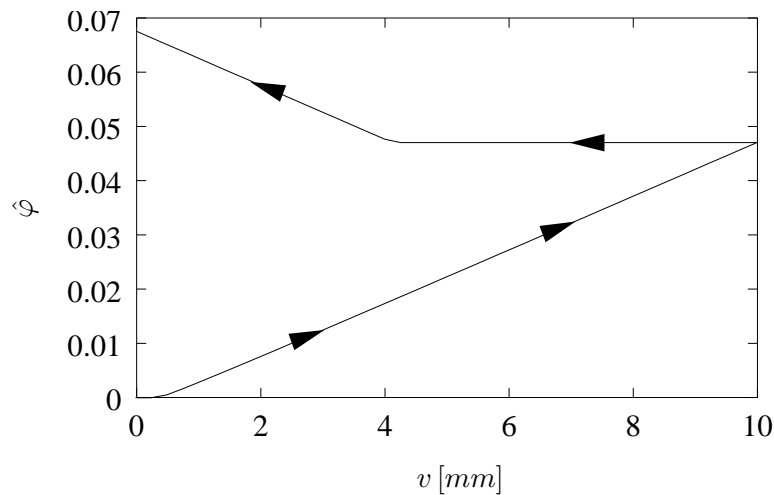
Das entspricht in etwa den Werten einer Aluminiumlegierung. Die Deformation wird mit der Eckverschiebung v beschrieben. Es wird ein Zyklus der Eckverschiebung von $v = 0 \text{ mm}$ bis $v = 10 \text{ mm}$ und zurück auf $v = 0 \text{ mm}$ betrachtet. In den Abbildungen 5.3 bis 5.6 sind die Faltungsrichtung α , das Faltenmaß β ¹, die Hauptmembrankraft

¹Für den schlaffen und den straffen Zustand ist die Angabe einer Faltungsrichtung α und eines Faltenmaßes β nicht sinnvoll. Solche Bereiche sind in den Grafiken mit einer gestrichelten Linie markiert.

Abbildung 5.3: Einfache Scherung, Faltungsrichtung α Abbildung 5.4: Einfache Scherung, Faltenmaß β

S_I und die akkumulierte plastische Dehnung $\hat{\varphi}$ (siehe Gleichung 9.84) dargestellt. Zu Beginn des Deformationsprozesses tritt elastische Faltung auf. Die Faltungsrichtung ist zu Beginn $\alpha = 2.356 \text{ rad} \approx 135^\circ$ und fällt bei wachsender Verschiebung v leicht ab. Ab etwa $v = 0.5 \text{ mm}$ treten plastische Verformungen auf. Zu erkennen ist das am Verlauf der Kurven für $\hat{\varphi}$ und S_I . Nach Umkehr der Scherbewegung findet eine Entlastung auf dem elastischen Pfad statt. Es treten zunächst keine neuen plastischen Deformationen auf. Bei Erreichen von $v = 9.5 \text{ mm}$ geht die Membran in den schlaffen Zustand über. Dieser Zustand hält bis $v = 4.5 \text{ mm}$ an. Danach kommt es erneut zu elastischer, homogener Faltung. Die Faltungsrichtung ist jetzt $\alpha = 0.752 \text{ rad} \approx 58^\circ$. Ab $v = 4.0 \text{ mm}$ treten erneut plastische Deformationen auf.

Bei der numerischen Analyse zeigt sich, daß beim Übergang vom schlaffen zum gefalteten Zustand während des umgekehrten Scherprozesses Konvergenzprobleme

Abbildung 5.5: Einfache Scherung, Hauptmembrankraft S_I Abbildung 5.6: Einfache Scherung, akkumulierte plastische Dehnung $\hat{\varphi}$

auftreten. Wie diese Konvergenzprobleme überwunden werden und der Faltenalgorithmus für komplexe Strukturanalysen tauglich gemacht werden kann, ist Thema des folgenden Kapitels.

5.5 Wie findet man gute Startwerte?

Ziel ist es, für das Newton Verfahren des Faltenalgorithmus eine Vorschätzung zu finden, welche die auftretenden plastischen Dehnungen in geeigneter Weise berücksichtigt. Hierzu werden einige Annahmen getroffen, die eine Transformation der Faltenkinematik und der Faltenbedingung in die Zwischenkonfiguration ermöglichen. Mittels der Kenntnisse aus Kapitel 4 gelingt es dann, eine Vorschätzung zu gewinnen. Mit

folgenden Hypothesen wird im weiteren gearbeitet:

- Der Übergang von der Referenz- zur Zwischenkonfiguration erfolgt ohne Starrkörperrotationen, nur durch plastische Verzerrungen, d.h. $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{U}}$. Diese Annahme geht auf Haupt zurück (siehe [11]).
- Die Korrektur der Faltenkinematik zur Manipulation des Membrankraftzustandes beeinflußt primär den elastischen Verzerrungszustand. Neue plastische Verzerrung werden zunächst außer Acht gelassen.

5.5.1 Transformation der Faltenkinematik in die Zwischenkonfiguration

Gegeben sind die Cauchy Green Verzerrungen \mathbf{C} der mittleren Lage und die plastischen Verzerrungen $\hat{\mathbf{C}}$ bzw. $\hat{\mathbf{U}}$ aus der Deformationsgeschichte. Ausgangspunkt ist die Faltenkinematik

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \beta \mathbf{N} \circ \mathbf{N} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{C}' = \mathbf{C} + 2\beta \mathbf{N} \circ \mathbf{N} \quad (5.18)$$

Es wird der Ansatz von Haupt [11] verfolgt. Hierbei ist der Übergang von der Referenz- zur Zwischenkonfiguration $\hat{\mathbf{F}}$ nur durch den plastischen Strecktensor

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{U}} \quad (5.19)$$

bestimmt. Mit der multiplikativen Zerlegung in elastische und plastische Deformationsanteile kann die Faltenkinematik auch als

$$\mathbf{C}' = \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \hat{\mathbf{U}} + 2\beta \mathbf{N} \circ \mathbf{N} \quad (5.20)$$

geschrieben werden (siehe Gleichung 5.6). Andererseits ist es denkbar, eine Korrektur zur Beeinflussung des Membrankraftzustandes direkt auf der Ebene der elastischen Dehnungen anzusetzen:

$$\mathbf{C}' = \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{C}'_e \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad (5.21)$$

Es werden die Faltungsrichtung $\hat{\alpha}$ bzw. $\hat{\mathbf{N}}(\hat{\alpha})$ sowie das Faltenmaß $\hat{\beta}$ der Zwischenkonfiguration eingeführt und die Faltenkinematik analog zu Gleichung 5.18 formuliert:

$$\mathbf{C}'_e = \mathbf{C}_e + 2\hat{\beta} \hat{\mathbf{N}} \circ \hat{\mathbf{N}} \quad (5.22)$$

Mit Gleichung 5.21 erhält man

$$\mathbf{C}' = \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \hat{\mathbf{U}} + 2\hat{\beta} \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{N}} \circ \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad (5.23)$$

Ein Vergleich der Beziehungen 5.20 und 5.23 führt auf

$$\beta \mathbf{N} \circ \mathbf{N} = \hat{\beta} \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{N}} \circ \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad (5.24)$$

Somit können die Faltenparameter der Zwischenkonfiguration mit den Faltenparametern der Referenzkonfiguration identifiziert werden:

$$\beta = \frac{\hat{\beta}}{\hat{k}^2} \quad (5.25)$$

$$\mathbf{N} = \hat{k} \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \hat{k} \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad (5.26)$$

mit

$$\hat{k}^2 = \frac{1}{\hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{C}} \cdot \hat{\mathbf{N}}} \quad (5.27)$$

5.5.2 Transformation der Faltenbedingung in die Zwischenkonfiguration

Die Faltenbedingungen liegen in der Form

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{D}') \cdot \mathbf{N} \quad (5.28)$$

$$0 = \mathbf{N} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{D}') \cdot \mathbf{N}_\perp \quad (5.29)$$

vor. In Gleichung 5.28 und Gleichung 5.29 kann der Vektor \mathbf{N} mit Gleichung 5.26 substituiert werden. Es ergibt sich für die erste Faltenbedingung

$$0 = \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{S}' \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{N}} \quad (5.30)$$

Da \hat{k}^2 ungleich Null ist, spielt der Faktor bei Erfüllung der Faltenbedingung keine Rolle. Der Vektor \mathbf{N}_\perp wird ähnlich dem Verfahren aus Gleichung 3.33 in eine Form

$$\mathbf{N}_\perp = \hat{\mathbf{U}} \cdot (\lambda \hat{\mathbf{N}} + \kappa \hat{\mathbf{N}}_\perp) \quad (5.31)$$

gebracht. Zu beachten ist hierbei, daß $\hat{\mathbf{U}}$ ein planarer Tensor ist. Da Gleichung 5.30 gilt, fallen einige Terme weg und man erhält als zweite Faltenbedingung

$$0 = \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{S}' \cdot \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{N}}_\perp \quad (5.32)$$

Eine Transformation der Membrankräfte \mathbf{S}' auf die Zwischenkonfiguration erfolgt nach dem Vorbild von Gleichung 9.38 und es gilt

$$\hat{\mathbf{S}}' = \frac{dA}{d\hat{A}} \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{S}' \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad (5.33)$$

In Kapitel 6.2 sind hierzu weitere Betrachtungen ausgeführt. Der von Null verschiedene Faktor $\frac{dA}{d\hat{A}}$ ist für die Erfüllung der Faltenbedingungen 5.30 und 5.32 unwesentlich, so daß man schließlich die auf die Zwischenkonfiguration transformierten Faltenbedingungen erhält.

$$0 = \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{S}}' \cdot \hat{\mathbf{N}} \quad (5.34)$$

$$0 = \hat{\mathbf{N}} \cdot \hat{\mathbf{S}}' \cdot \hat{\mathbf{N}}_\perp \quad (5.35)$$

Lösungen dieses Gleichungssystems sind die transformierte Faltungsrichtung $\hat{\alpha}$ und das Faltungsmaß $\hat{\beta}$.

Eine Vorschätzung für die Dickenverzerrung erhält man mit den aus $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ ermittelten elastischen planaren Faltendehnungen C'_e und den aus vorhergehenden Lastschritten bekannten plastischen Dickenverzerrungen \hat{U}_{33} . Die elastische Dickenverzerrung

$$C_{33}^{e'} = 1 - \frac{\nu}{1 - \nu} (C_{11}^{e'} + C_{22}^{e'} - 2) \quad (5.36)$$

folgt aus dem linearen, isotropen Teilstoffgesetz und der ESZ-Bedingung. Weiter wird die Hypothese von Haupt auch für die 3D-Dehnungen angewendet, so daß sich die Dickenverzerrung der Membran

$$C'_{33} = \hat{U}_{33} C_{33}^{e'} \hat{U}_{33} \quad (5.37)$$

ergibt.

Zur Ermittlung der Vorschätzung ist zusammenfassend Folgendes zu sagen:

- Unter den genannten Voraussetzungen ist die Faltenkinematik auf die Zwischenkonfiguration transformiert worden: $C'_e = C_e + 2\hat{\beta}\hat{\mathbf{N}} \circ \hat{\mathbf{N}}$. Die neuen Größen $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ wurden eingeführt.
- Mit den Gleichungen 5.34 und 5.35 liegen auch die Faltenbedingungen in transformierter Form vor.
- Das Teilstoffgesetz aus Kapitel 9.6.3 ist eine lineare Beziehung zwischen den Spannungen \hat{T}_{ij} und den Dehnungen C_{ij}^e (siehe hierzu auch Tietze [40]). Zudem ist das elastische Verhalten richtungsunabhängig. Die Faltenbedingung können also auf Ebene der Zwischenkonfiguration entsprechend des in Kapitel 4 vorgestellten Verfahrens behandelt und die Lösungen für $\hat{\alpha}$ und $\hat{\beta}$ anschließend mit Gleichung 5.25 sowie Gleichung 5.26 in die Referenzkonfiguration zurücktransformiert werden.
- Eine Vorschätzung der Dickenverzerrung kann man aus den Gleichungen 5.36 und 5.37 gewinnen.

Es zeigt sich, daß mit den so gewonnenen Vorschätzungen Konvergenz innerhalb weniger Newtoniterationen erreicht wird, d.h. in der Regel 2 bis 4 Iterationen. In dem Fall, daß keine neuen plastischen Deformationen auftreten, ist diese Vorschätzung zugleich die exakte Lösung.

Kapitel 6

Thermische Faltung

In Kapitel 5 ist das Konzept einer spannungsfreien Zwischenkonfiguration verwendet worden, um inelastische Effekte bei der Membranfaltung zu beschreiben. Dabei handelt es sich um eine Hintereinanderschaltung von inelastischen und elastischen Deformationen. Dieses Konzept ist ebenfalls dazu geeignet, thermische Dehnungen in die Faltenanalyse zu integrieren. Thermische Einflüsse auf die Membranfaltung wurden bereits von Chiu, Benson, Fiscella & Burns [8] auf Grundlage der Roddemanschen Theorie untersucht. Sie weisen darauf hin, daß bei den von ihnen betrachteten Polymermembranen die Temperaturdehnungen nicht mehr in jedem Fall als klein angenommen werden können.

In diesem Kapitel wird ein Verfahren vorgestellt, das in der Lage ist, Temperatureinflüsse auf die Membranfaltung zu erfassen. Im Gegensatz zu [8] basiert es auf der referenzbezogenen Formulierung der Faltenkinematik und der Faltenbedingung. Die Hintereinanderschaltung von Deformationen wird auf die von Haupt in [11] vorgeschlagene Art und Weise interpretiert und eine Beschreibung der thermischen und mechanischen Deformationen sowie der Membrankräfte angegeben. Als ein Beispiel dient die in den vorangegangenen Kapiteln bereits untersuchte einfache Scherung.

6.1 Thermische Dehnungen

Ausgangspunkt der kinematischen Betrachtungen ist die multiplikative Zerlegung des Deformationsgradienten Gleichung 5.1.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \hat{\mathbf{F}}$$

Abbildung 5.1 veranschaulicht diese Zerlegung. Der Übergang von der Referenzkonfiguration in die Zwischenkonfiguration ist nicht eindeutig bestimmt und kann unterschiedlich interpretiert werden. An dieser Stelle wird auf die Hypothese von Haupt [11] zurückgegriffen. Der Übergang von der RKF zur ZKF ist somit allein durch den Strecktensor $\hat{\mathbf{U}} = \hat{\mathbf{F}}$ bestimmt und es ergibt sich für die multiplikative Zerlegung

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e \cdot \hat{\mathbf{U}} \tag{6.1}$$

$\hat{\mathbf{U}}$ wird hier als thermischer Strecktensor aufgefaßt. Es folgen die Zusammenhänge für die Dehnungen:

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{F}_e^T \cdot \mathbf{F}_e \quad (6.2)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \hat{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad (6.3)$$

$$\mathbf{C} = \hat{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{C}_e \cdot \hat{\mathbf{U}} \quad (6.4)$$

Als einfachste Beschreibung des thermischen Strecktensors $\hat{\mathbf{U}}$ wird ein linearer Zusammenhang mit der Temperaturänderung ΔT angenommen.

$$\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{E} + \alpha_{11} \Delta T \mathbf{e}_1 \circ \mathbf{e}_1 + \alpha_{22} \Delta T \mathbf{e}_2 \circ \mathbf{e}_2 \quad (6.5)$$

α_{11} und α_{22} sind die linearen Ausdehnungskoeffizienten eines orthotropen Materials. Prinzipiell können auch andere Beschreibungen für das Materialverhalten bei Temperaturdehnungen genutzt werden.

Sind die Temperaturdehnungen klein, so kann auch eine additive Aufspaltung der Greenschen Verzerrungen in thermische und mechanische Anteile vorgenommen werden. Das Verfahren vereinfacht sich in diesem Fall etwas. Derartige Analysen sind von Herbrich [12] durchgeführt worden.

6.2 Membrankräfte

Die Membrankräfte $\hat{\mathbf{S}}$ vom 2. Piola Kirchhoff Typ (bezogen auf die Zwischenkonfiguration) ergeben sich aus einer Tensorfunktion in Abhängigkeit von den elastischen Dehnungen \mathbf{C}_e .

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{S}}(\mathbf{C}_e) \quad (6.6)$$

Für diese Beziehung können z.B. die elastischen Materialgesetze aus Kapitel 9.6 gewählt werden. Die Frage ist zu klären, wie die 2. Piola Kirchhoff Membrankräfte $\hat{\mathbf{S}}$ in Abhängigkeit von den Dehnungen \mathbf{C} und den thermischen Streckungen $\hat{\mathbf{U}}$ beschrieben werden können. Hierzu wird auf die Transformation Gleichung 9.38 zurückgegriffen:

$$\mathbf{S}^C = \frac{dA}{da} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T$$

Eine analoge Beziehung gilt für die Membrankräfte $\hat{\mathbf{S}}$ und \mathbf{S}^C :

$$\mathbf{S}^C = \frac{d\hat{A}}{da} \mathbf{F}_e \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{F}_e^T \quad (6.7)$$

Hierbei ist $d\hat{A}$ die Fläche eines Flächenelementes der Zwischenkonfiguration. Aus diesen beiden Beziehungen folgt mit Gleichung 6.1 der Zusammenhang zwischen den Membrankräften \mathbf{S} und $\hat{\mathbf{S}}$.

$$\mathbf{S} = \frac{d\hat{A}}{dA} \hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \quad (6.8)$$

Das Verhältnis der Flächenelemente der RKF und der ZKF ist noch zu bestimmen. Für den Flächenvektor $d\hat{\mathbf{A}}$ der Zwischenkonfiguration gilt

$$d\hat{\mathbf{A}} = d\hat{\mathbf{x}}_1 \times d\hat{\mathbf{x}}_2 = (\hat{\mathbf{U}} \cdot d\mathbf{X}_1) \times (\hat{\mathbf{U}} \cdot d\mathbf{X}_2) \quad (6.9)$$

$$= (\hat{U}_{\alpha 1} dX_1 \mathbf{e}_\alpha) \times (\hat{U}_{\beta 2} dX_2 \mathbf{e}_\beta) \quad (6.10)$$

$$= (\hat{U}_{11}\hat{U}_{22} - \hat{U}_{12}\hat{U}_{21}) dX_1 dX_2 \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \quad (6.11)$$

$$= \det(\hat{\mathbf{U}}) d\mathbf{A} \quad (6.12)$$

Da die Linienelemente $d\hat{\mathbf{x}}_\alpha$ der Zwischenkonfiguration als Folge von Gleichung 5.19 in der Referenzebene positioniert sind, haben beide Flächenvektoren $d\hat{\mathbf{A}}$ und $d\mathbf{A}$ die Richtung \mathbf{e}_3 . Das Flächenverhältnis ist für diesen Fall

$$\frac{d\hat{A}}{dA} = \det(\hat{\mathbf{U}}) \quad (6.13)$$

und es ergibt sich für die Transformation der Membrankräfte schließlich

$$\mathbf{S} = \det(\hat{\mathbf{U}}) \hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{S}} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \quad (6.14)$$

Die Membrankräfte $\hat{\mathbf{S}}$ hängen vom Dehnungstensor \mathbf{C}_e ab, der mit Gleichung 6.4 durch \mathbf{C} und $\hat{\mathbf{U}}$ beschrieben werden kann. Die 2. Piola Kirchhoff Membrankräfte lauten nun

$$\mathbf{S} = \det(\hat{\mathbf{U}}) \hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \hat{\mathbf{S}}(\hat{\mathbf{U}}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1}) \cdot \hat{\mathbf{U}}^{-1} \quad (6.15)$$

6.3 Faltenkriterium und Faltenalgorithmus

Für die Bestimmung des Membranzustandes kann das in Kapitel 5.2 formulierte Faltenkriterium verwendet werden. Die thermischen Streckungen $\hat{\mathbf{U}}$ sind aus Gleichung 6.5 her bekannt. Die Cauchy Green Dehnungen \mathbf{C} werden vom finiten Element vorgegeben. Durch Verwendung der korrigierten Dehnungen $\mathbf{C}' = \mathbf{C} + 2\beta\mathbf{N} \circ \mathbf{N}$ in Gleichung 6.15 an Stelle von \mathbf{C} erhält man die korrigierten Membrankräfte \mathbf{S}' . Das Auffinden der Faltungsrichtung α und des Faltenmaßes β geht entsprechend der in Kapitel 3 vorgestellten Verfahrensweise vonstatten. Die Startwerte der Newtoniteration des Faltenalgorithmus können entsprechend der Methode aus Kapitel 5.5 gewählt werden.

6.4 Beispiel: Einfache Scherung

Das Beispiel einer quadratischen Membran mit einfacher Scherdeformation aus Kapitel 3.7 wird nun unter Einwirkung einer Temperaturdifferenz ΔT betrachtet. Die Geometrie- und Materialdaten entsprechen den Werten der isotropen Membran aus Kapitel 3.7.1:

- Breite $a = 100 \text{ mm}$
- Membrandicke $h = 1 \text{ mm}$
- E-Modul $E = 100 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
- Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$
- lineare Ausdehnungskoeffizienten $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 0.0001 \frac{1}{\text{K}}$

Untersucht werden die Temperaturzustände $\Delta T = \mp 100 \text{ K}$ und $\Delta T = 0 \text{ K}$. Die Abbildungen 6.1 bis 6.3 zeigen die Faltungsrichtung α , das Faltenmaß β bzw. die Hauptmembrankraft S_I' in Abhängigkeit von der Scherverschiebung v für verschiedene, vorgegebene Temperaturdifferenzen ΔT . Es zeigt sich, daß, vom Anfangsbereich

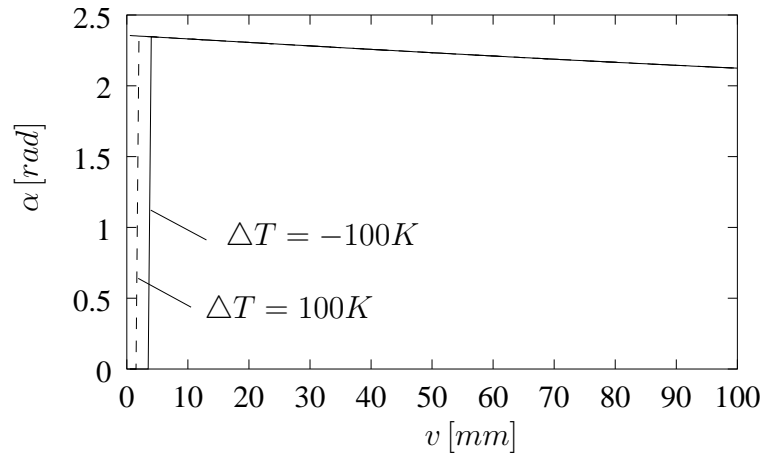


Abbildung 6.1: Einfache Scherung, Faltungsrichtung α

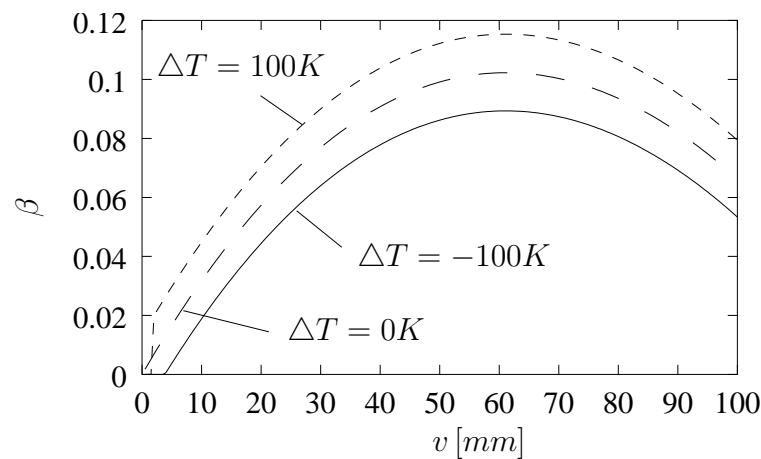
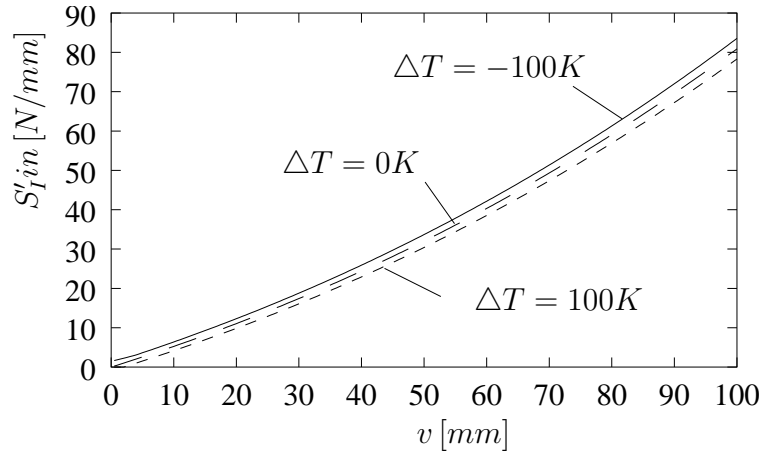


Abbildung 6.2: Einfache Scherung, Faltenmaß β

Abbildung 6.3: Einfache Scherung, Hauptmembrankraft S'_I

abgesehen, die Faltungsrichtung α für die betrachteten Temperaturen gleich ist. Das entspricht den Erwartungen, da die Membran Isotropie hinsichtlich sowohl der thermomechanischen als auch der mechanischen Eigenschaften aufweist. Ein wesentlicher Unterschied besteht im Beginn der Faltung. Aufgrund der Temperaturdehnungen herrscht bei $\Delta T = -100 \text{ K}$ zunächst ein straffer Zustand, der bei $v = 4 \text{ mm}$ in einen homogen gefalteten Zustand übergeht. Bei $\Delta T = 100 \text{ K}$ ist die Membran anfangs schlaff und wechselt bei $v = 2 \text{ mm}$ in den gefalteten Zustand. Der Graph des Faltenmaßes β zeigt für alle betrachteten Temperaturen prinzipiell den selben Verlauf. Bei einer Erwärmung muß die kinematische Korrektur wegen der thermischen Ausdehnung der Membran allerdings größer und bei einer Abkühlung der Membran aufgrund der thermischen Kontraktion entsprechend kleiner ausfallen als bei einer Membran ohne Temperatureinwirkung. Deshalb liegt die Kurve für $\Delta T = 100 \text{ K}$ über und die Kurve für $\Delta T = -100 \text{ K}$ unter der 0 K - Kurve. Die Membrankraft S'_I der erwärmten Membran ist bei vorgegebenem Deformationszustand erwartungsgemäß kleiner, die der abgekühlten Membran ist größer, und weichen von der 0 K - Lösung um etwa $\pm 3\%$ ab. In der abgekühlten Membran herrscht bei $v = 0 \text{ mm}$ ein straffer Membranzustand. Somit treten bereits bei $v = 0 \text{ mm}$ von Null verschiedene Membrankräfte auf.

Kapitel 7

Strukturanalysen

In diesem Kapitel werden Beispiele für die Anwendung des Faltenalgorithmus auf Membranstrukturen präsentiert. Die bei den numerischen Strukturanalysen angewendete Verfahrensweise wird kurz erläutert.

Globale Gleichgewichtsiteration: Bei der numerischen Analyse werden die in Kapitel 2 beschriebenen finite Elemente für die Schnittmuster-methode verwendet. Eine räumlich gekrümmte Membranstruktur setzt sich hierbei aus einer Anzahl von ursprünglich ebenen Teilen zusammen. Im allgemeinen macht das unterschiedliche Knoten- und Elementnumerierungen für die Referenz- und die Momentankonfiguration erforderlich. Die Verbindung der einzelnen Teile in der MKF wird durch eine entsprechende Numerierung der Knoten und Elemente sichergestellt. Die ebenen Membranteile sind zu Beginn der Gleichgewichtsiteration in eine räumliche Lage (Vorschätzung) zu bringen, welche die Gleichgewichtsbedingungen allerdings nicht erfüllen muß. Die Wahl dieser Vorschätzung hat bei einigen Beispielen sehr sorgfältig zu geschehen, um Konvergenzprobleme zu vermeiden. Zweckmäßig ist es, Ergebnisse aus vorangegangenen Rechnungen als Vorschätzung zu verwenden. Bei der Schnittmuster-methode ist es im allgemeinen nicht möglich, die Referenzlage als Ausgangskonfiguration für die Newton-Iteration zu nutzen. Bei einigen Beispielen zeigt sich, daß das Newton Verfahren nur schlecht konvergiert. In diesen Fällen wird auf das quasi-gedämpfte Newton Verfahren von Kröplin zurückgegriffen. Details hierzu findet man in [36].

Interne Iteration des Faltenalgorithmus: Bei der Bestimmung des Membrankraftzustandes im finiten Element wird der Membranzustand in jedem Integrationspunkt analysiert. Dies geschieht mit den Faltenkriterien, wie sie in den Kapiteln 3.1 und 5.2 beschrieben wurden. Findet man eine homogen gefalteten Membran vor, so müssen die Lösungen der Faltenbedingungen 3.41 und 3.42 bestimmt und so der herrschende einachsige Membrankraftzustand ermittelt werden. Sofern nicht auf die weitgehend analytische Beschreibung des Faltenproblems zurückgegriffen werden kann (siehe Kapitel 4), wird das nichtlineare Gleichungssystem mit dem Newton Verfahren gelöst.

Zur Wahl der Startwerte der Iteration für die Faltungsrichtung α und das Faltenmaß β bieten sich verschiedene Möglichkeiten an:

- Als Startwerte werden die Lösungen des "linearen" Problems (siehe Kapitel 4) verwendet.
- Man wählt den Mittelwert der von Lu, Accorsi & Leonard [18] angegebenen Grenzwinkel der Faltungsrichtung als Startwert für α .
- Bei plastischem Materialverhalten können die Startwerte entsprechend des Verfahrens aus Kapitel 5.5 bestimmt werden. Dies geschieht in Verbindung mit der Lösung des linear elastischen Problems auf der Ebene der Zwischenkonfiguration.

Es zeigt sich, daß das Newton Verfahren bei einer geeigneten Wahl des Startwertes gut konvergiert. Im Verlauf der globalen Gleichgewichtsiteration, kann die Membran jedoch Konfigurationen einnehmen, welche unphysikalisch sind und dem Faltenalgorithmus Schwierigkeiten bereiten. In solchen Fällen werden die Membrankräfte und -steifigkeiten willkürlich gesetzt. Bewährt hat sich, unkorrigierte MembranstEIFigkeiten zu verwenden und die Membrankräfte gleich Null zu setzen. Zu beachten ist, daß diese Zustände nicht in einer ausiterierten Gleichgewichtslage auftreten dürfen. Insbesondere gilt das für Rechnungen mit Plastizität, da hier die Deformationsgeschichte Einfluß auf das Ergebnis hat. In solch einem Fall muß die Rechnung mit einem neuen Startwert oder veränderter Lastschrittgröße wiederholt werden.

7.1 Airbag

Untersucht wird ein Airbag. Dieses Beispiel findet man z.B. bei Bauer [3], Contri & Schrefler [9] und Ziegler, Wagner & Bletzinger [46]. Der Airbag besteht aus einer oberen und einer unteren Membran. In der Referenzkonfiguration ist die Membran quadratisch (siehe Abbildung 7.1). Die Membran besteht aus isotropen, linear elastischen Material mit der in Gleichung 9.57 beschriebenen Voigt Matrix. Aus der Literatur sind die Geometrie- und Materialdaten entnommen:

- Breite $a = 848.53 \text{ mm}$
- Dicke $h = 0.6 \text{ mm}$
- E-Modul $E = 588 \text{ MPa}$
- Querkontraktionszahl $\nu = 0.4$

Die Membran ist mit einem Innendruck p^i belastet. Da die Struktur symmetrisch bezüglich der drei durch die Koordinatenachsen aufgespannten Ebenen ist, genügt es, nur ein Achtel der Membran zu betrachten (als Konsequenz können nur symmetrische

Konfigurationen analysiert werden). Es kommen bilineare Membranelemente in einem 10×10 Netz zur Anwendung. Die äußeren Ränder sind nur in vertikaler Richtung gefesselt und in der x_1 - x_2 Ebene frei verschieblich. In Abbildung 7.1 sind die Referenzkonfiguration und die Lagerbedingungen skizziert. Abbildung 7.2 zeigt die aktuelle

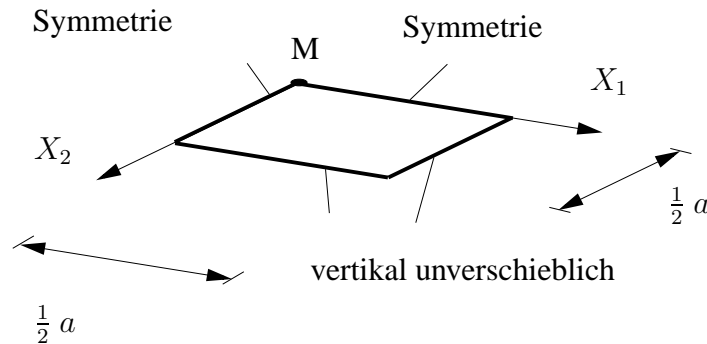


Abbildung 7.1: Referenzkonfiguration eines Achtels des Airbags

Lage des Airbags bei einem Innendruck von $p^i = 0.005 \text{ MPa}$. Die bei Berücksichtigung der Faltung gewonnenen Werte für die vertikale Mittelpunktsverschiebung w_M bei einem Innendruck $p^i = 0.005 \text{ MPa}$ und entsprechende Resultate aus der Literatur sind

- $w_M = 216.3 \text{ mm}$, vorliegende Arbeit
- $w_M = 217 \text{ mm}$, Contri & Schrefler [9]
- $w_M = 216 \text{ mm}$, Ziegler, Wagner & Bletzinger [46].

Es zeigt sich, daß die erzielten Ergebnisse mit den Werten aus der Literatur sehr gut übereinstimmen.

In Abbildung 7.3 ist die Mittelpunktsverschiebung in Abhängigkeit vom Innendruck p^i wiedergegeben. Dargestellt sind die Verläufe aus Rechnungen mit und ohne Berücksichtigung der Membranfaltung. Es ist zu erkennen, daß die Membran bei Berücksichtigung der Faltung weicher wird. Für einen kleinen Innendruck zeigen sich relativ große Differenzen. Die Abweichung, bezogen auf die Ergebnisse mit Faltung, liegt hier bei bis zu 7%. Mit zunehmenden Innendruck stellt sich in der Membran immer mehr ein straffer Zustand ein, so daß die Verschiebungen für beide Fälle ab einem Innendruck von $p^i = 0.2 \text{ MPa}$ praktisch gleich sind. In den Abbildungen 7.4 und 7.5 ist der Faltungszustand für einen Innendruck von $p^i = 0.005 \text{ MPa}$ bzw. $p^i = 0.2 \text{ MPa}$ wiedergegeben. Die Faltungsrichtung in der aktuellen Lage, d.h. die Richtung verschwindender Membrankräfte, ist durch Linien in den Integrationspunkten wiedergegeben. Die Länge dieser Linien repräsentiert die Größe des Faltenmaßes. Man sieht

deutlich, daß bei $p^i = 0.005 \text{ MPa}$ ein Großteil der Membran homogen gefaltet ist. Bei $p^i = 0.2 \text{ MPa}$ tritt Faltung nur am Rand und in der Ecke auf. Ansonsten ist die Membran straff. Deshalb verschwinden Unterschiede zur Rechnung ohne Faltenmodell.

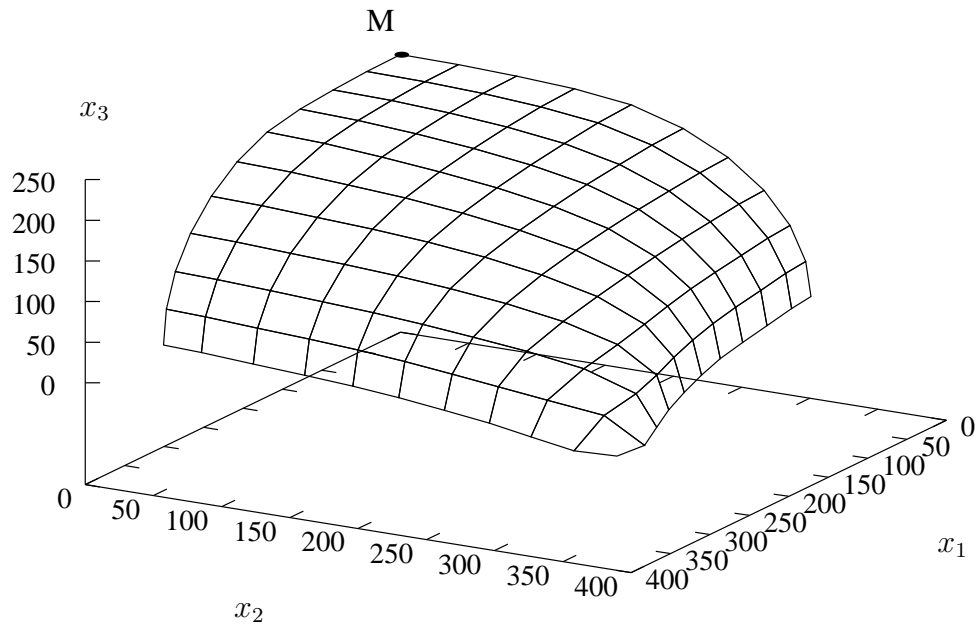


Abbildung 7.2: Entfalteter Airbag bei einem Innendruck $p^i = 0.005 \text{ MPa}$ (Abmessungen in mm)

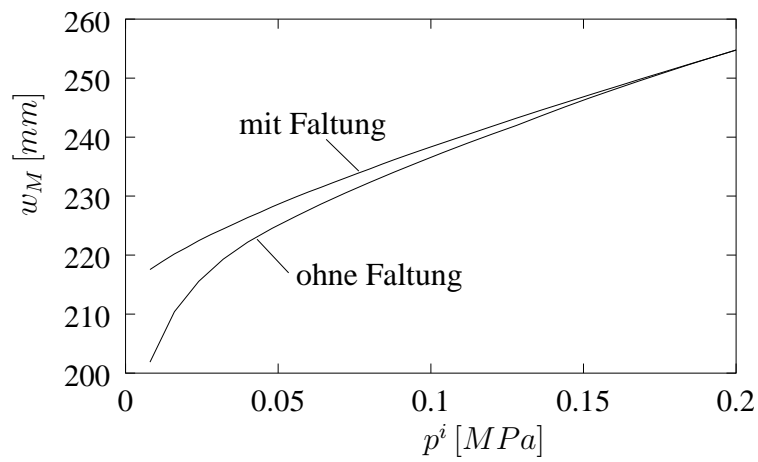


Abbildung 7.3: Mittelpunktverschiebung w_M für Airbag mit und ohne Membranfaltung

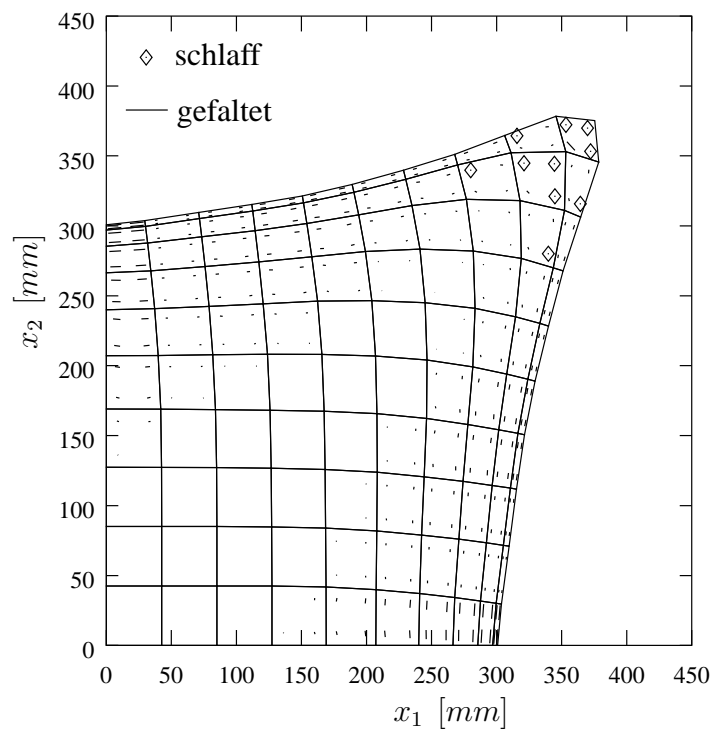


Abbildung 7.4: Deformations- und Faltungszustand eines Airbags bei $p^i = 0.005$ MPa

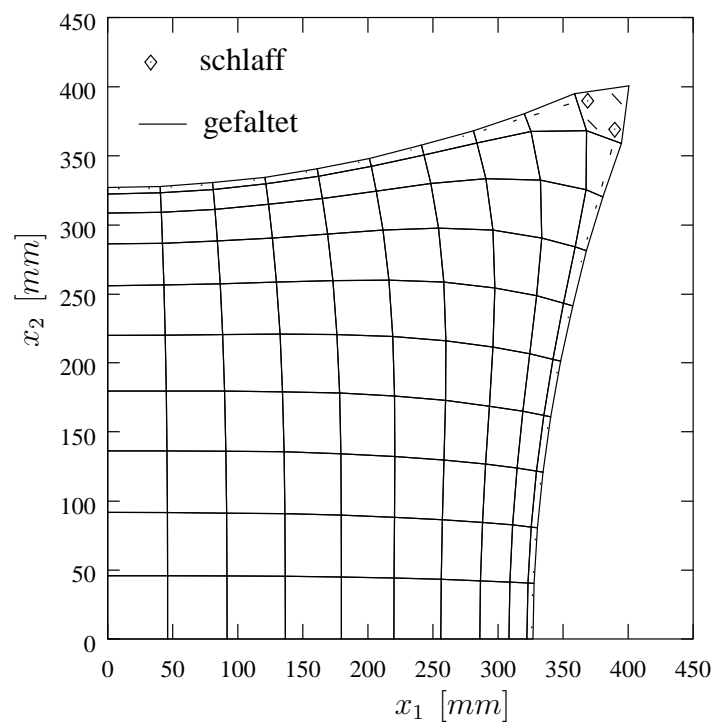


Abbildung 7.5: Deformations- und Faltungszustand eines Airbags bei $p^i = 0.2 \text{ MPa}$

7.2 Luftschiff

Ein einfaches Modell eines Luftschiffes wird im folgenden untersucht. Die Luft-

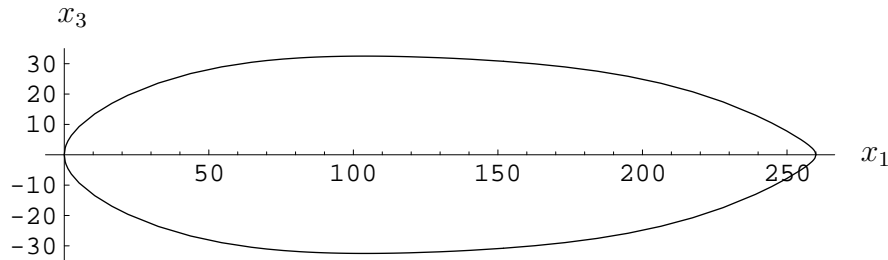


Abbildung 7.6: Sollform des Luftschiffes, Maße in [m]

schiffstruktur besteht aus einer Membranhülle. Andere Strukturelemente des Luftschiffes werden zum Teil durch entsprechende Randbedingungen modelliert oder vernachlässigt. Das Luftschiff ist durch einen Innendruck p_0 und den aerostatischen Auftrieb belastet. Der Auftrieb wird mit einer in vertikaler Richtung linear veränderlichen Druckverteilung simuliert. Für die Druckbelastung des Luftschiffes gilt

$$p^i = p_1 x_3 + p_0 \quad \text{mit}$$

$$p_0 = 0.65 \frac{N}{m^2}$$

$$p_1 = 0.01 \frac{N}{m^3}$$

Das Eigengewicht der Membranhülle wird vernachlässigt. Da die Struktur und die Belastung symmetrisch sind, reicht es aus, eine Hälfte des Luftschiffes zu berechnen. Das Luftschiff besitzt einen Kielbalken. Zwischen dem Kielbalken und der oberen Luftschiffhülle besteht eine Verbindung durch Seile. Die Deformationen des Kielbalkens und der Seile werden außer Acht gelassen und der Kielbalken sowie die Seilverbindungen mit der Oberseite durch Lager modelliert. In der Symmetrieebene sind somit Verschiebungen in x_2 - und x_3 -Richtung verhindert. Die Nase des Luftschiffes ist in alle Richtungen unverschieblich gelagert. Andere Strukturelemente wie z.B. Leitwerke werden hier nicht betrachtet. In der Abbildung 7.7 sind die Lagerbedingungen dargestellt. Die Luftschiffhülle wird aus 12 ebenen Bahnen zusammengesetzt. Abbildung 7.7 zeigt die Anordnung der betrachteten sechs Bahnen. Die Elementierung einer solchen Bahn ist in Abbildung 7.8 dargestellt. Für das Luftschiff wird die Sollform dadurch gewonnen, daß eine Kurve $x_3 = x_3(x_1)$ um die x_1 -Achse rotiert. Einem Vorschlag von Gertler folgend wird für diese Erzeugendenkurve die Quadratwurzel eines Polynoms 6. Ordnung gewählt.

$$x_3(x_1) = l \sqrt{\sum_{i=1}^6 c_i (x_1)^i} \quad (7.1)$$

Bei einer Länge $l = 260 \text{ m}$ und den Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_1 &= 1.0 \\ c_2 &= 2.1496 \\ c_3 &= -17.7735 \\ c_4 &= 36.7166 \\ c_5 &= -33.5113 \\ c_6 &= 11.4185 \end{aligned}$$

ergibt sich die in Abbildung 7.6 dargestellte Sollform. Die Bahnen werden so bestimmt, daß diese Form gut approximiert wird. Das FE-Modell besteht aus 960 bilinearen Membranelementen mit 2913 Knoten in der Momentankonfiguration. Die Membran weist nichtlineares Materialverhalten entsprechend Gleichung 9.59 mit den bereits in Kapitel 3.7.2 verwendeten 13 Materialkonstanten auf.

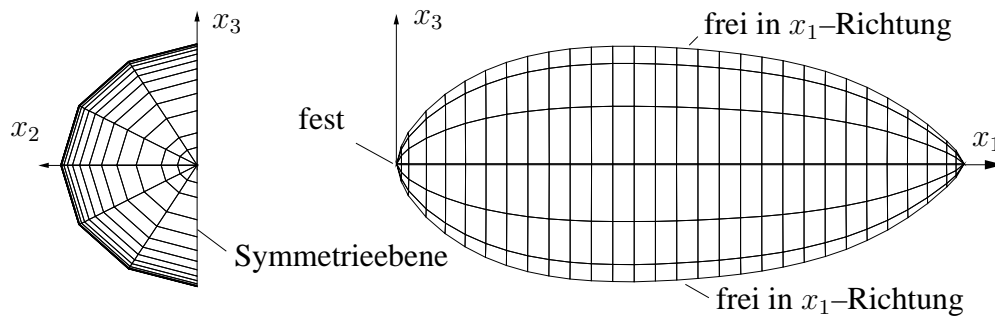


Abbildung 7.7: Randbedingungen der Membranhülle des Luftschiffes

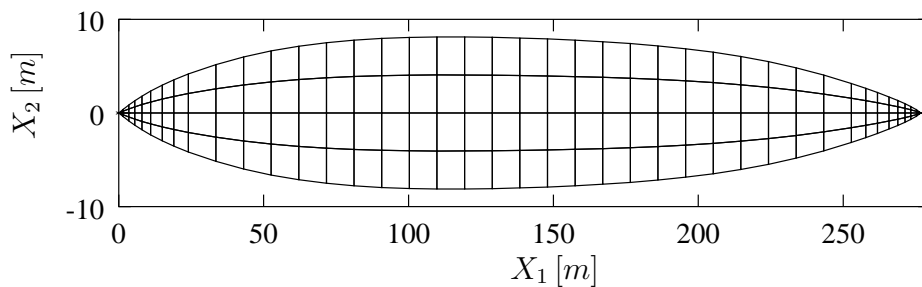


Abbildung 7.8: FE-Diskretisierung einer Bahn in der ebenen Referenzkonfiguration

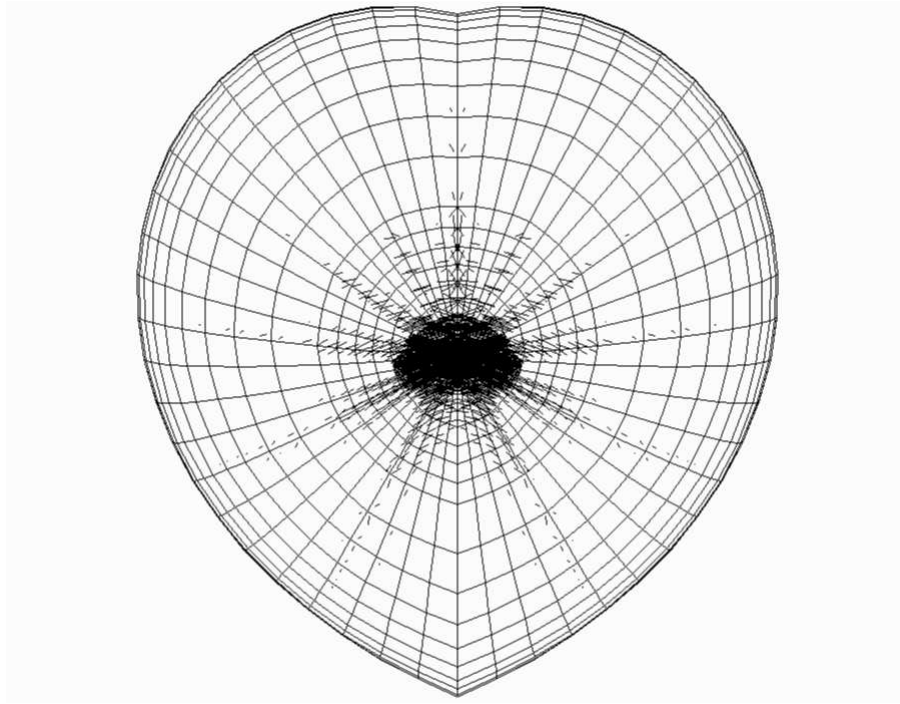


Abbildung 7.9: Faltungszustand in der Luftschiffhülle; Vorderansicht

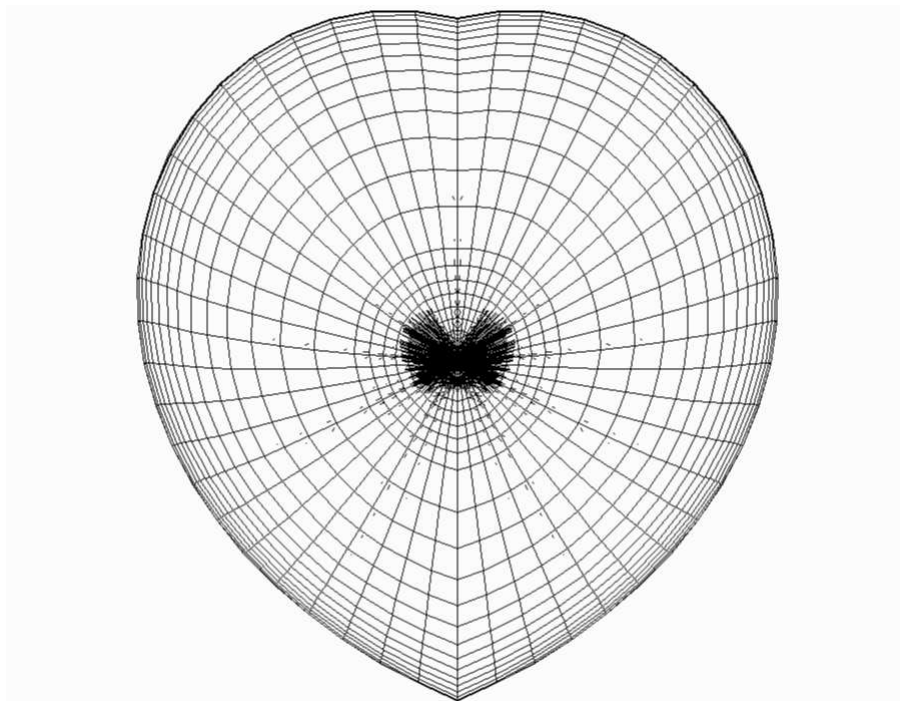


Abbildung 7.10: Faltungszustand in der Luftschiffhülle; Rückansicht

Momentankonfiguration und Faltungszustand des Luftschiffes sind in den Abbildungen 7.9 und 7.10 in der Vorder- und in der Rückansicht zu sehen. Die Faltungsrichtung, d.h. die Richtung mit verschwindender Hauptmembrankraft, ist durch Linien in den Integrationspunkten der finiten Elemente gekennzeichnet. Die Länge dieser Linien repräsentiert die Größe des Faltenmaßes.

Durch den aerostatischen Auftrieb und die hier angewendeten Lagerungen bekommt das Luftschiff einen Herzformquerschnitt. Starke Faltung findet am Bug und am Heck des Luftschiffes statt. Dieser Bereich wird jedoch bei einer realen Konstruktion mit einer biegesteifen Kappe versehen. Desweiteren tritt Faltung im Bugbereich an den Nahtlinien der Bahnen auf. Hier führt die erzwungene Kompatibilität zwischen den Randkurven der ehemals ebenen Bahnen zu Stauchungen. Dieser Effekt verringert sich in Bereichen, in denen die Membran weniger stark gekrümmt ist. Im mittleren Bereich des Luftschiffes treten keine Falten mehr auf.

Abbildung 7.11 und 7.12 zeigen den Membrankraftzustand für die Druckkennwerte $p_0 = 0.65 \frac{N}{m^2}$ und $p_1 = 0.01 \frac{N}{m^3}$. Die 2. Piola-Kirchhoff Membrankräfte S_{11} und S_{22} sind in den Abbildungen durch eine Grau-Skalierung von Schwarz (0 N/m) bis Weiß (18.6 N/m für S_{11} bzw. 22.9 N/m für S_{22}) wiedergegeben. Man erkennt, daß die Membrankräfte an den Nahtstellen der Bahnen geringer sind als im Inneren der Bahnen.

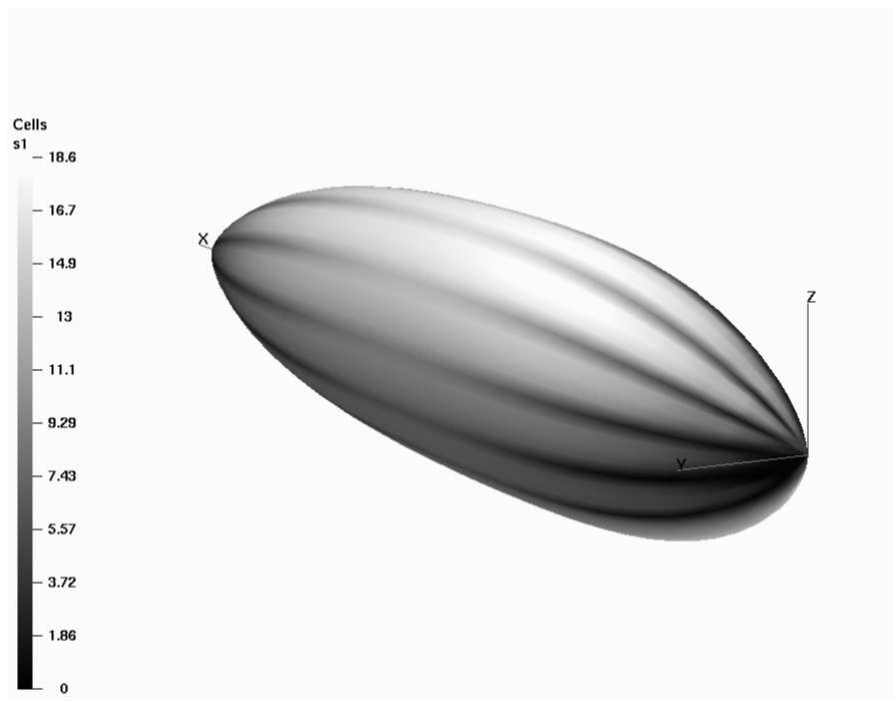


Abbildung 7.11: Membrankraftzustand in der Luftschiffhülle; S_{11} in $\left[\frac{N}{m}\right]$

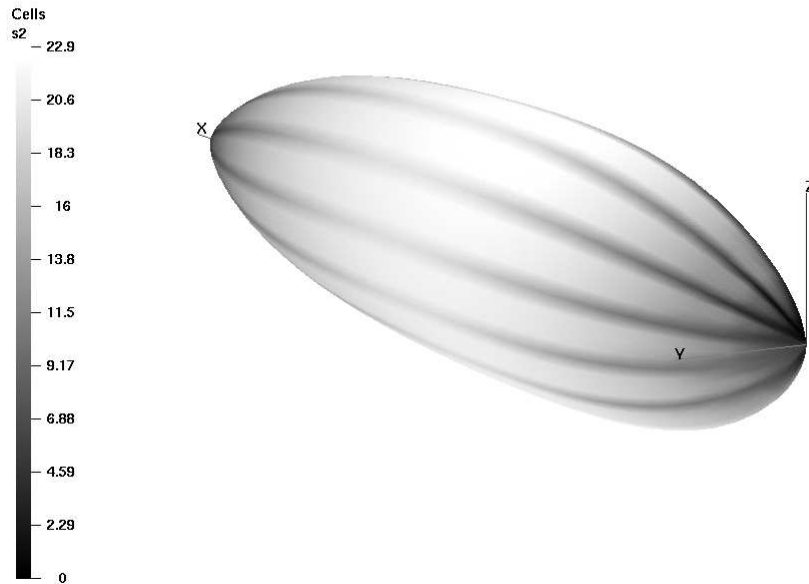


Abbildung 7.12: Membrankraftzustand in der Luftschiffhülle; S_{22} in $\left[\frac{N}{m}\right]$

7.3 Sonnensegel

Sonnensegel zum Antrieb von Satelliten scheinen für Missionen innerhalb des Sonnensystems und darüber hinaus sehr geeignet zu sein. Das hier betrachtete Sonnensegel für einen Kleinsatelliten war Gegenstand eines Projektes des Instituts für Luft- und Raumfahrt der Technischen Universität Berlin. Das Sonnensegel wird als Membran modelliert, die an den Eckpunkten und am Mittelpunkt in allen Richtungen unverschieblich gelagert ist. Im Ausgangszustand ist die Membran eben und quadratisch. Geometrie und Lagerungsbedingung des Sonnensegels sind in Abbildung 7.13 skizziert. Als Material kommt eine Polyamidfolie zur Anwendung. Die Folie verfügt über isotropes Materialverhalten entsprechend Gleichung 9.57 und Gleichung 6.5. Das Sonnensegel ist durch den Sonnendruck $p = 0.92 \cdot 10^{-5} \text{ N/mm}^2$ und durch die Temperaturdifferenz $\Delta T = \pm 100 \text{ K}$ belastet. Der Sonnendruck wird bei der Rechnung wie ein Luftdruck behandelt. Geometriedaten, Materialwerte und die Belastung des Sonnensegels sind:

- Breite $a = 10000 \text{ mm}$
- Membrandicke $h = 7.6 \cdot 10^{-3} \text{ mm}$
- E-Modul $E = 2000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
- Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$

- lineare Ausdehnungskoeffizienten $\alpha_{11} = \alpha_{22} = 8.0 \cdot 10^{-5} \frac{1}{K}$
- Sonnendruck $p = 0.92 \cdot 10^{-5} \frac{N}{mm^2}$
- Temperaturdifferenz $\Delta T = \pm 100 K$

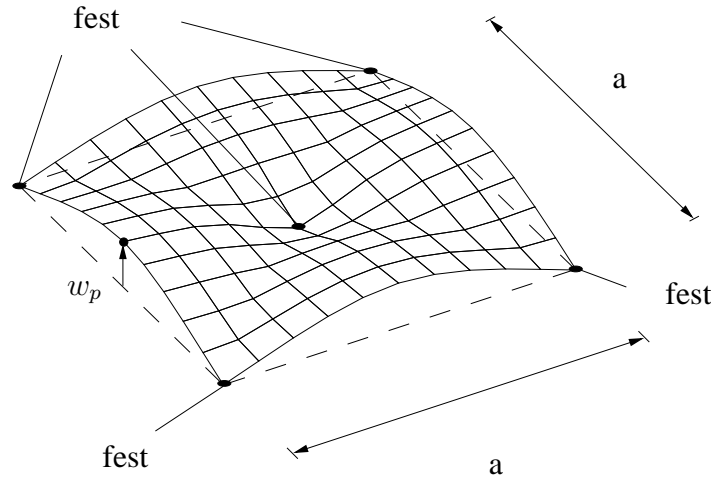


Abbildung 7.13: Geometrie und Lagerung des Sonnensegels

Die Abbildungen 7.14 bis 7.16 zeigen den Faltungszustand für die mit Sonnendruck belastete Membran bei Temperaturdifferenzen von $\Delta T = 0 K$ bzw. $\Delta T = \pm 100 K$. Die Faltung ist in den Integrationspunkten durch Linien entlang der Faltungsrichtung (Richtung mit Hauptmembrankraft gleich Null) gekennzeichnet. Integrationspunkte mit einem schlaffen Membranzustand sind durch Rauten markiert. In allen Fällen tritt im Bereich der Diagonalen Faltung auf. Die Abkühlung reduziert die Faltung. Der zentrale Bereich des Sonnensegels ist bei $\Delta T = -100 K$ straff. Bei der erwärmten Membran entstehen auch im Zentrum Falten. Die Verschiebung w_P des Seitenmittelpunktes (siehe Abbildung 7.13) soll hier zum Vergleich als ein Kennwert herangezogen werden. Diese Verschiebung wächst mit zunehmender Temperatur. Für die drei Temperaturzustände ergeben sich folgende Werte:

- $w_P = 733.9 mm$ bei $\Delta T = -100 K$
- $w_P = 890.3 mm$ bei $\Delta T = 0 K$
- $w_P = 1050.9 mm$ bei $\Delta T = 100 K$

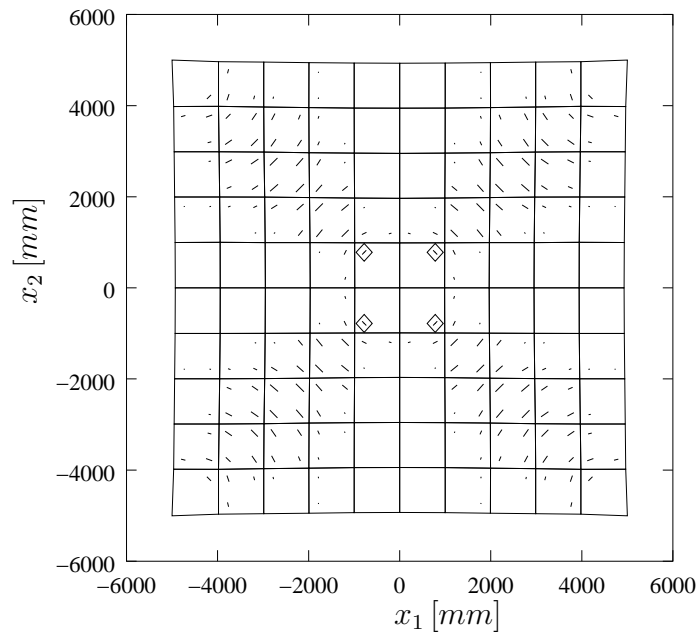


Abbildung 7.14: Aktuelle Lage (Draufsicht) und Faltungszustand des Sonnensegels bei $\Delta T = -100\text{ K}$

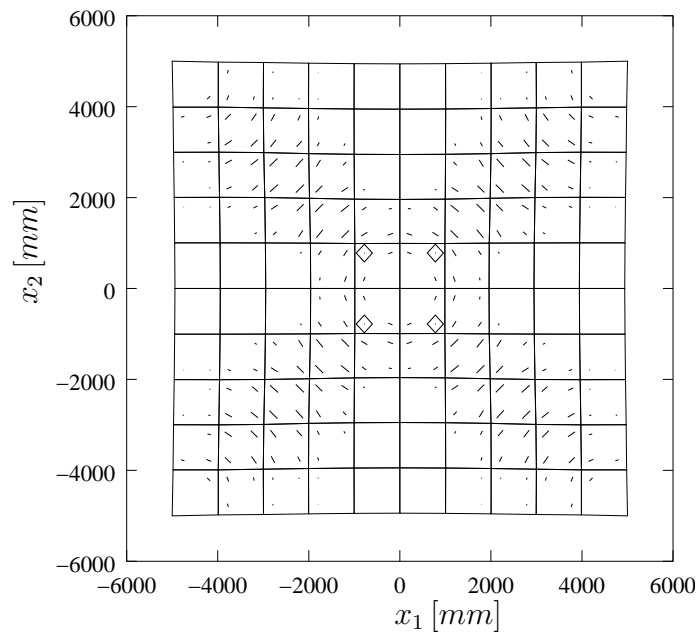


Abbildung 7.15: Aktuelle Lage (Draufsicht) und Faltungszustand des Sonnensegels bei $\Delta T = 0\text{ K}$

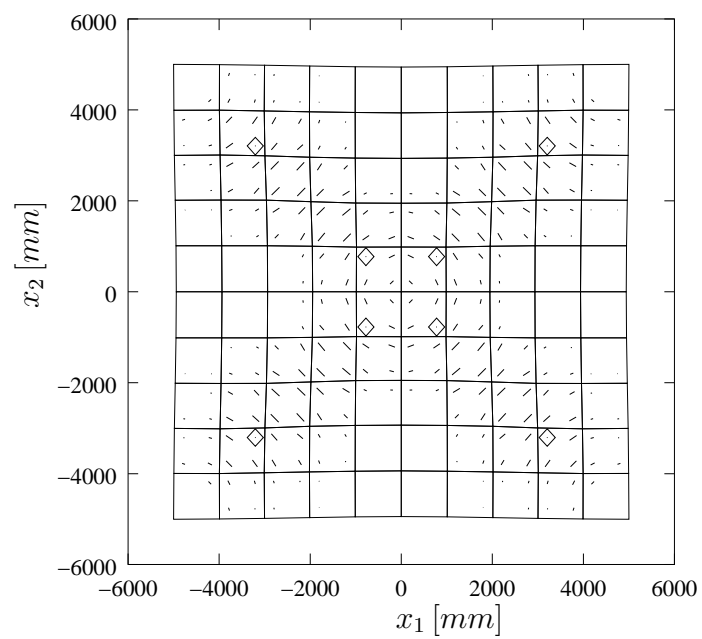


Abbildung 7.16: Aktuelle Lage (Draufsicht) und Faltungszustand des Sonnensegels bei $\Delta T = 100 \text{ K}$

7.4 Verdrillung einer Kreisringmembran

Die Verdrillung einer Membran ist ein Beispiel, für das bei elastischem Materialverhalten in der Literatur numerische Lösungen angegeben werden (siehe z.B. Roddeman [31], Schoop, Taenzer & Hornig [35]). Hier sollen nun auch plastische Effekte berücksichtigt werden. Zur Überprüfung der numerischen Analyse wurde ein Experiment durchgeführt. Dies gibt die Möglichkeiten den berechneten Faltungszustand einer qualitativen Beurteilung zu unterziehen und die Leistungsfähigkeit der numerischen Methode anhand einfacher Strukturkennwerte zu bewerten. Als Strukturkennwerte werden hier der Drehwinkel ϑ und das Drillmoment M_D am Innenrand der Membran gewählt. Eine Kreisringmembran wird, wie in Abbildung 7.17 skizziert, am Außen-

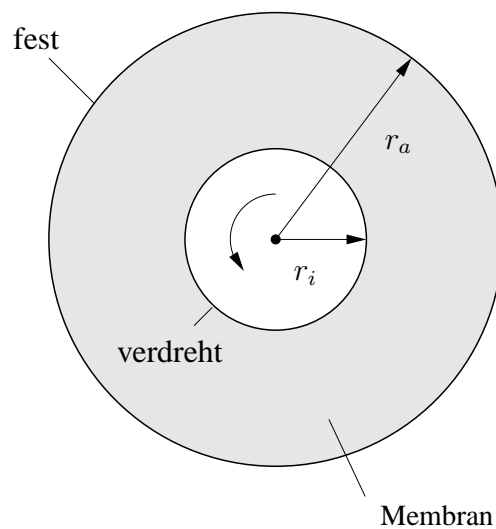


Abbildung 7.17: Geometrie der Kreisringmembran

rand festgehalten. Der Innenrand wird um den Winkel ϑ verdreht. Dabei bleiben der Innenradius r_i und der Außenradius r_a unverändert. Die Verdrillbewegung wird bei $\vartheta = 1.82^\circ = 0.03176 \text{ rad}$ umgekehrt und anschließend der Innenkreis auf $\vartheta = 0^\circ$ zurückgedreht. Die Membran besteht aus einer handelsüblichen Aluminiumfolie und hat in etwa die Daten:

- E-Modul $E = 70000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$
- Querkontraktionszahl $\nu = 0.3$
- Fließdehnung $y_0 = 0.002$
- Membrandicke $h = 0.01 \text{ mm}$
- Innenradius $r_i = 45 \text{ mm}$
- Außenradius $r_a = 125 \text{ mm}$

Numerische Simulation: Zur Anwendung kommen 10×40 bilineare Membranelemente. Es wird das Materialgesetz von Besdo (siehe Kapitel 9.6.3) mit dem Verfestigungsgesetz Gleichung 9.83 verwendet. Während der Rechnung für die rückwärts gerichtete Drehbewegung traten numerischen Probleme auf. Durch die Verwendung eines gedämpften Newton Verfahrens (siehe [36]) konnten diese Schwierigkeiten überwunden werden.

Experimentelle Analyse: Neben der numerischen Simulation ist die Verdrillung der Kreisringmembran auch in einem einfachen Experiment untersucht worden. Abbildung 7.18 zeigt den Versuchsaufbau. Eine Hydropulsanlage der Firma Schenk mit Torsionszylinder kam zum Einsatz. Die Folie wurde am Außenrand auf einem an der Prüfmaschine befestigten, kreisringförmigen Träger und in der Kreismitte auf einem drehbaren Aluminiumstempel aufgeklebt. Der Stempel ist durch einen hydraulisch arbeitenden Aktuator verdreht und das sich einstellende Moment durch eine Momentenmeßdose bestimmt worden.

In den Abbildungen 7.19 bis 7.24 sind für ausgewählte Meßpunkte die rechnerisch bzw. experimentell ermittelten Faltungszustände dargestellt. Für numerische Ergebnisse sind in den Integrationspunkten die Falten durch Linien entlang der aktuellen Faltungsrichtung markiert, d.h. die von Null verschiedene Hauptmembrankraft wirkt senkrecht zu dieser Linie. Die Länge dieser Linien ist ein Maß für den Faltenparameter β_R . Die Linienlänge ist auf das maximale Faltenmaß β_R des jeweilig betrachteten Zustandes bezogen worden. Integrationspunkte mit schlaffem Zustand werden durch rautenförmige Punkte markiert. Der rechnerisch ermittelte Faltungszustand wird in einem Kreisausschnitt von 36° dargestellt.

Abbildung 7.19 und 7.20 zeigen die Membran beim maximalen Drehwinkel von $\vartheta = 0.03176 \text{ rad}$. Es tritt eine starke, kurzwellige Faltenbildung am Innenrand der Membran auf, die sich mit wachsendem Radius verringert und langwelliger wird. Experiment und Rechnung zeigen eine gute Übereinstimmung bei der qualitativen Beschreibung dieses Faltungszustandes. Eine Abschätzung mittels Abbildung 3.7 ergibt für $\beta_R = 0.311$ einen Wert von etwa $\frac{f}{\ell} = \frac{1}{5}$. In Abbildung 7.20 findet man über den halben Umfang circa 20 Falten am Innenrand verteilt. Die abgeschätzte Faltenhöhe liegt damit etwas über einem Millimeter, was auch die beobachtbare Größenordnung ist.

Abbildung 7.21 und 7.22 zeigen die Membran während der Rückwärtsbewegung bei einem Drehwinkel von $\vartheta = 0.0244 \text{ rad}$. Die numerische Rechnung sagt hier einen kräftefreien, schlaffen Zustand am Innenrand voraus. Da während der Verdrillung plastische Dehnungen auftraten, entstehen bei der rückwärtsgewandten Drehbewegung des Membraninnenrandes elastische Stauchungen. Der Faltenalgorithmus ermittelt hier einen schlaffen Zustand. In der Mitte des Kreisringes tritt in der Simulation Faltung auf, was auf Eigenspannungen zurückgeführt werden kann. Im Experiment weist der Bereich am Innenrand starke Faltenbildung auf. Die Faltungsrichtung ist die gleiche wie beim Verdrillprozeß. Es handelt sich hierbei um bleibende Verfor-

mungen der Membran aus der Deformationsgeschichte. Die Folie hat eine bleibende, kurzweilige Struktur erhalten und besitzt somit eine Biegesteifigkeit. Deshalb kann sie in diesem Bereich in gewissem Umfang Druckkräfte aufnehmen. Dieser Effekt kann durch eine Faltentheorie nicht beschrieben werden. Das Tragverhalten wird in diesem Zustand durch den Faltenalgorithmus dennoch gut erfaßt. Dies wird später im Zusammenhang mit Abbildung 7.25 diskutiert werden. In der restlichen Folie gibt es eine leichte Faltenbildung mit einer zu den Falten am Innenrand nahezu senkrecht stehenden Richtung, wie in Abbildung 7.22 zu sehen ist. Ursache hierfür ist die Fähigkeit der Folie, Kräfte vom Innenrand zum Außenrand zu übertragen, die aus der am Innenrand entstandenen Biegesteifigkeit herrührt. Hierin unterscheiden sich die experimentellen Ergebnisse von den durch Simulation erzielten Resultaten.

In Abbildung 7.23 und 7.24 ist der Faltungszustand bei der Rückstellbewegung für einen Drehwinkel von $\vartheta = 0.007 \text{ rad}$ wiedergegeben. Die numerische Lösung zeigt wieder eine starke Faltenbildung am Innenrand, die zum Außenrand hin schnell geringer wird. Die Faltungsrichtung ist dabei etwa senkrecht zur Faltungsrichtung beim Verdrillungsprozeß (siehe Abbildung 7.19). Das ist eine Folge der plastischen Streckung der Membran. Qualitativ stimmt der berechnete mit dem experimentell ermittelten Faltungszustand gut überein. Die plastischen Falten am Innenrand, wie sie in Abbildung 7.22 zu erkennen waren, sind verschwunden. Die Membran hat sich in der ursprünglichen Faltungsrichtung gestreckt und faltet sich nun in etwa senkrecht zu dieser Richtung.



Abbildung 7.18: Versuchsaufbau

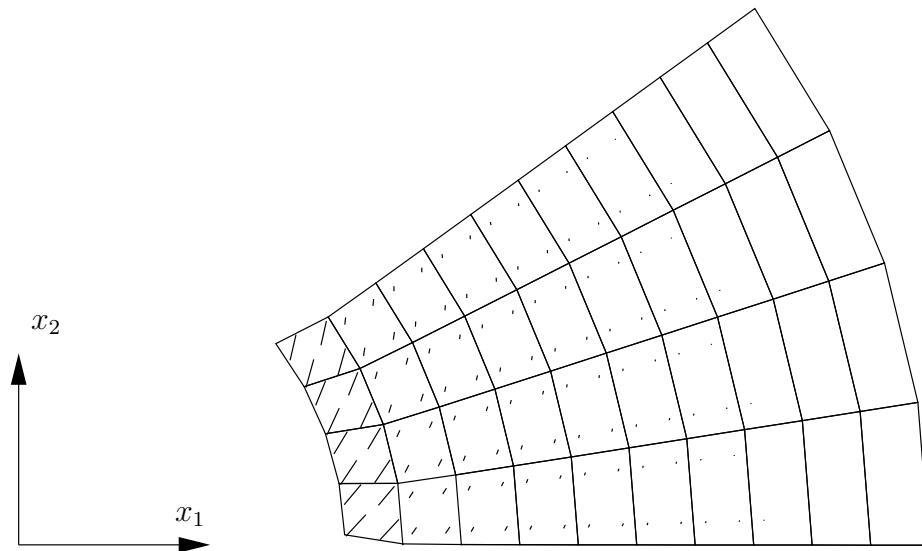


Abbildung 7.19: Berechneter Faltungszustand der Membran bei der maximalen Verdrehung $\vartheta = 0.03176 \text{ rad}$ mit max. $\beta_R = 0.311$

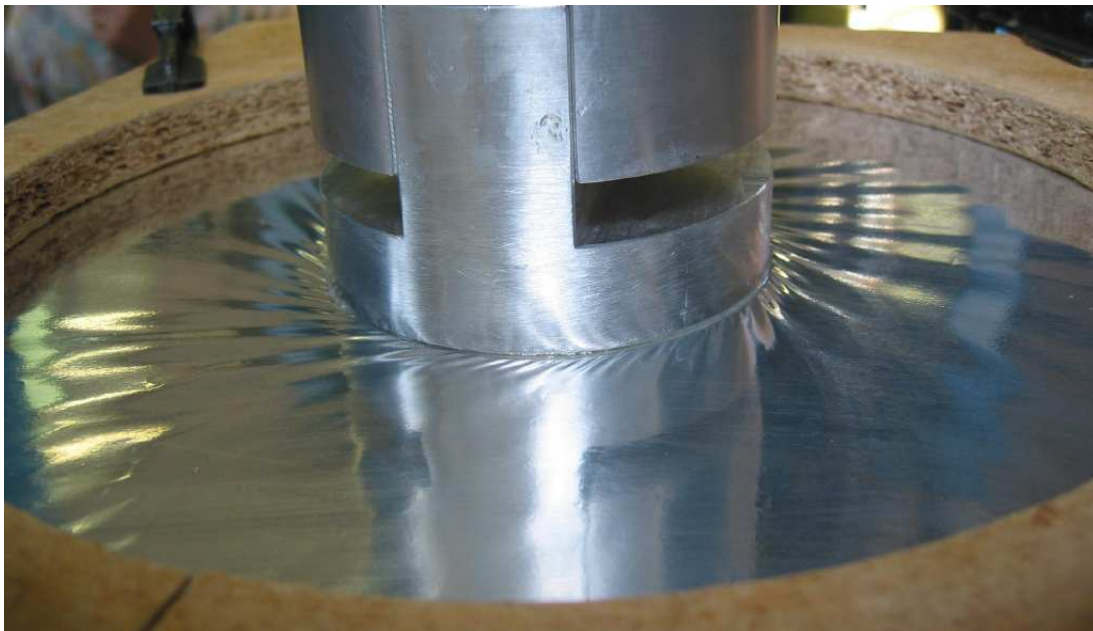


Abbildung 7.20: Faltungszustand der Folie bei der maximalen Verdrehung $\vartheta = 0.03176 \text{ rad}$

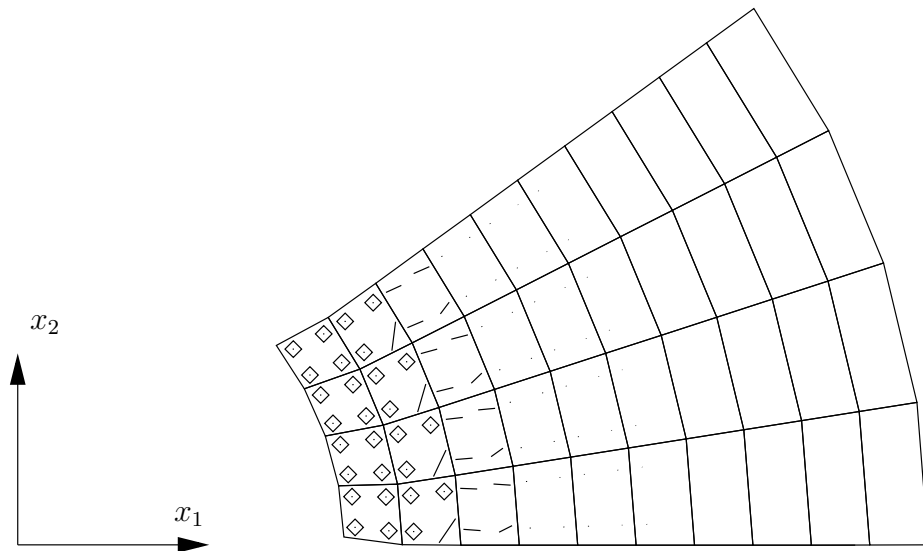


Abbildung 7.21: Berechneter Faltungszustand der Membran während der Rückkehrbewegung bei einer Verdrehung $\vartheta = 0.0244 \text{ rad}$ mit max. $\beta_R = 0.042$

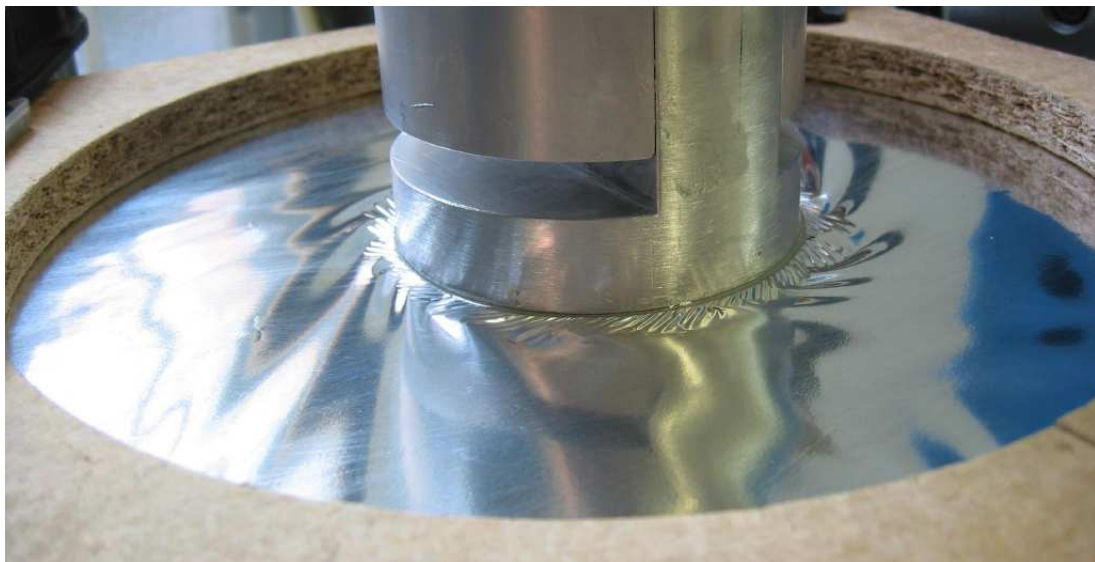


Abbildung 7.22: Faltungszustand der Folie zu Beginn der Umkehrbewegung bei $\vartheta \approx 0.0244 \text{ rad}$

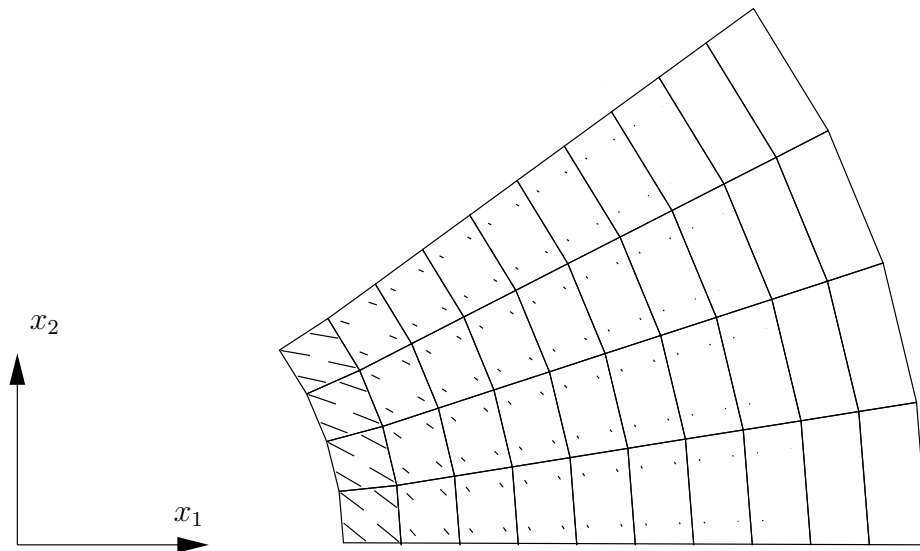


Abbildung 7.23: Berechneter Faltungszustand der Membran während der Rückkehrbewegung bei einer Verdrehung $\vartheta = 0.007 \text{ rad}$ mit max. $\beta_R = 0.289$



Abbildung 7.24: Faltungszustand der Folie während der Umkehrbewegung bei $\vartheta \approx 0.007 \text{ rad}$

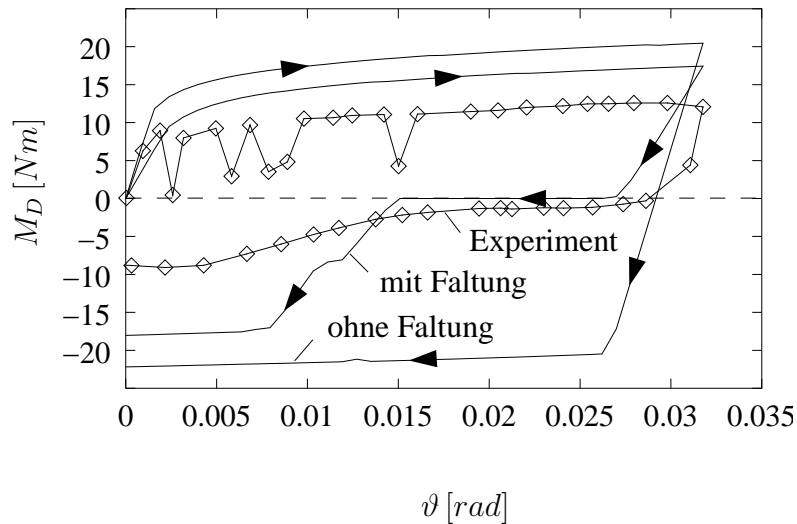


Abbildung 7.25: Drehmoment M_D am Innenrand bei vorgegebenen Drehwinkel ϑ

Die Abbildung 7.25 zeigt das sich am Innenrand einstellende Drehmoment M_D in Abhängigkeit vom vorgegebenen Drehwinkel ϑ . Hierbei werden den experimentellen Daten Ergebnisse aus den Rechnungen mit und ohne Faltenalgorithmus gegenübergestellt. Pfeile geben die Prozeßrichtung im Diagramm an.

Verdrillung: Die Charakteristiken der drei M_D - ϑ -Verläufe sind hier im wesentlichen gleich. Zu Beginn ist ein kurzer elastische Bereich mit einem starken Anstieg der Kurven zu erkennen, an den sich ein Bereich mit plastischen Deformationen anschließt. Im Anfangsbereich zeigen die experimentellen Daten starke Schwankungen. Verglichen mit dem Experiment wird für die Rechnung mit Faltenmodell eine zu geringe Steigung der Kurve während des elastischen Prozesses ermittelt. Das gilt auch für die Entlastung nach der Umkehr der Drehbewegung. Die M_D -Werte aus den Rechnungen sind im Allgemeinen zu hoch. Sie weisen Abweichungen bezogen auf experimentelle Werte von 38% (mit Faltenalgorithmus) und 62% (ohne Berücksichtigung der Membranfaltung) auf.

Entdrillung: Bei der Durchführung des Experimentes waren bei einem Drehwinkel von $\vartheta \approx 1.8^\circ \approx 0.0317 \text{ rad}$ in der Folie an zwei Stellen Anfänge einer Rißbildung zu erkennen. Daraufhin wurde die Drehbewegung umgekehrt. Im Diagramm ist eine elastische Gerade beim Entlastungsprozeß, sowohl für das Experiment als auch für die Simulationen zu erkennen. Die drei Graphen unterscheiden sich jedoch in ihrer Steigung. Daran anschließend zeigt sich ein Bereich mit einem relativ kleinen, nahezu konstanten Moment M_D . Die Simulation mit Faltenalgorithmus sagt für diesen Bereich ein Verschwinden des Momentes voraus. Die Ursachen für dieses Verhalten der Folie wurde bereits im Zusammenhang mit dem Faltenzustand (Abbildungen 7.22 und 7.22) diskutiert. Die numerische Analyse ohne Faltenalgorithmus kann dieses Ver-

halten überhaupt nicht darstellen. Sie folgt dem elastischem Pfad bis zum erneuten Fließen und ermittelt ein völlig übertriebenes Moment. Im weiteren Verlauf zeigen die experimentellen Daten ein Ansteigen des Momentenbetrages. Kurz vor Erreichen des Nullwinkels setzte erneut Reißbildung ein. Die Rechnung mit Faltenmodell weist bei $\vartheta = 0.015 \text{ rad}$ ebenfalls ein Wachsen des Momentenbetrages auf. Die Simulation ermittelt für den Winkelbereich von $\vartheta = 0.015 \text{ rad}$ bis $\vartheta = 0.008 \text{ rad}$ in zahlreichen Integrationspunkten Übergänge vom schlaffen zum gefalteten Zustand einerseits und erneutem Fließen andererseits. Diese Wechselwirkungen führen zu dem stufenförmigen Verlauf der Kurve. Ab $\vartheta = 0.008 \text{ rad}$ bleibt der von der Rechnung bestimmte Faltungszustand vom Prinzip her unverändert. Das Moment wird von der Rechnung deutlich zu hoch eingeschätzt. Das ist unter anderem darauf zurückzuführen, daß mit dem Materialgesetz nur eine isotrope Verfestigung beschrieben wird.

Diskussion der Ergebnisse: Der Vergleich der Simulation mit dem Experiment zeigt, daß der Faltenalgorithmus prinzipiell in der Lage ist, das Tragverhalten der plastisch deformierten Membranstruktur wiederzugeben. Auch die Analyse des Faltungszustandes zeigt Übereinstimmungen mit dem Experiment. Die Faltentheorie trifft allerdings auch an ihre Grenzen. Durch die plastische Faltung entsteht eine bleibende Welligkeit der Folie, die ihr in gewissem Umfang eine Biegesteifigkeit verleiht. Die daraus folgende Fähigkeit der Membran Druckkräfte in Richtung der Falten aufnehmen zu können, kann die hier benutzte Faltentheorie nicht abbilden. Das Tragverhalten der Membran in dieser Situation wird dennoch gut wiedergegeben. Quantitativ treten allerdings signifikante Unterschiede zwischen Experiment und Simulation auf. Die folgenden Punkte könnten hierbei eine Erklärung geben:

- Randbedingungen werden vom Faltenalgorithmus nicht erfaßt. Die vertikale Verschiebung an den Rändern ist im Experiment verhindert, und somit die Membranfaltung am Rand unterdrückt sowie in der Umgebung des Randes vermindert. Diese Tatsache findet bei der Bestimmung des Membrankraftzustandes durch den Faltenalgorithmus keine Berücksichtigung.
- Mit der Zugfeldtheorie wird der Membrankraftzustand nicht detailliert ermittelt. Bei der numerischen Analyse kann das Auswirkungen auf den Beginn des plastischen Fließens haben.
- Einfluß von Imperfektionen beim Experiment: Bei der Durchführung des Experimentes traten natürlich einige Abweichungen von der beabsichtigten Situation auf. So erwies es sich als schwierig, die Folie in einem glatten Zustand auf dem Träger zu befestigen. Teile der Folie waren deshalb schon im Ausgangszustand in geringem Maße gestaucht bzw. leicht gefaltet. Da die Folie auf dem Träger aufgeklebt wurde, war eine spätere Korrektur nicht mehr möglich. Dies ist eine mögliche Ursache für die Schwankungen im Anfangsbereich der Momentenkurve Abbildung 7.25.

- Das Materialgesetz: Eine Ursache für die Abweichung der numerischen Ergebnisse vom Experiment liegt im Materialgesetz, speziell in der Beschreibung der Verfestigung. Es wird isotrope Verfestigung modelliert. Der Bauschingereffekt kann nicht wiedergegeben werden. Das erklärt insbesondere, daß die während der Rückstellbewegung berechneten Momente über den experimentellen Werten liegen.
- Einfluß von Biegeeffekten: Durch plastische Faltung erhält die Membran eine gewellte Struktur und somit eine Biegesteifigkeit. Damit kann der Einfluß der Biegung wachsen. Dieser Effekt wird durch die Faltentheorie nicht erfaßt.

Kapitel 8

Schlußbemerkungen

Ein Forschungsgegenstand des Instituts für Mechanik der TU Berlin ist seit Jahren die numerische Simulation von Membranstrukturen, insbesondere von Segelkonstruktionen. Dabei spielt die Analyse des Faltungsphänomens eine wichtige Rolle.

In der vorliegenden Arbeit ist ein Verfahren zur numerischen Behandlung der Membranfaltung entwickelt und vorgestellt worden. Das Verfahren ist in der Lage, geometrische und physikalische Nichtlinearitäten sowie thermische Einflüsse zu berücksichtigen. Ausgangspunkt ist hierbei das Roddemansche Konzept (siehe [30]) zur Behandlung der homogenen Faltung. In Kapitel 3 ist die Roddemansche Formulierung auf die Referenzkonfiguration transformiert worden, was für die hier verwendeten finiten Elemente vorteilhaft ist. Anhand von Beispielrechnungen zeigt sich, daß der Faltenalgorithmus auch bei nichtlinearem Materialverhalten zuverlässig arbeitet. Eine konsistente Linearisierung für die Anwendung des Verfahrens im Rahmen einer FE-Analyse wurde angegeben. Auf Grundlage der referenzbezogenen Darstellung der Faltentheorie konnten analytische Untersuchungen zur Membranfaltung für den Fall eines linearen Materialverhaltens, d.h. für den Fall einer linearen Spannungs–Dehnungs–Beziehung, durchgeführt werden. In Kapitel 4 sind Lösungen für einfache Deformationszustände aufgeführt. Die Berücksichtigung inelastischer Effekte in einer gefalteten Membran erfolgte auf Grundlage der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten, d.h. des Konzeptes einer Zwischenkonfiguration. Eine Neuformulierung des Faltenkriteriums wurde vorgenommen. Um geeignete Startwerte für den Faltenalgorithmus bei inelastischen Deformationen zu erhalten, sind die Faltenbedingungen bei Verwendung einiger Annahmen in die Zwischenkonfiguration transformiert worden. Auf der Ebene der Zwischenkonfiguration können mittels der Faltenanalyse für lineare Spannungs–Dehnungs–Relationen Startwerte für den Faltenalgorithmus ermittelt werden. Dieses Verfahren hat sich als sehr zuverlässig und effizient erwiesen. Ausgehend von den Betrachtungen der Membranfaltung im Falle inelastischer Deformationen ist eine Berücksichtigung von Temperaturdehnungen möglich. Der Faltenalgorithmus ist entsprechend erweitert worden. In Beispielen wurde die Anwendbarkeit des vorgestellten Verfahrens auf reale Strukturen unter Beweis gestellt und dessen Grenzen aufgezeigt.

Kapitel 9

Anhang

In diesem Kapitel werden die Grundlagen der Membrantheorie aufgeführt, beginnend mit der hier verwendeten Vektor- und Tensoralgebra sowie der Differentialgeometrie zur Beschreibung von Flächen. Desweiteren widmet sich dieses Kapitel der Beschreibung des Deformations- und des Membrankraftzustandes. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V.) ist in dieser Arbeit Ausgangspunkt für die numerische Analyse von Membranstrukturen. Schließlich werden die in dieser Arbeit verwendeten Materialgesetze vorgestellt. Es wird dabei nur insofern auf die Sachverhalte eingegangen, wie sie für das Verständnis dieser Arbeit wichtig sind.

9.1 Vektor- und Tensoralgebra

Die Vektor- und Tensoralgebra ist weitgehend bekannt und in zahlreichen Lehrbüchern ausführlich beschrieben (siehe z.B. Schade [32]). Da aber in der Literatur für einige Operatoren zum Teil unterschiedliche Definitionen zu finden sind, werden die in dieser Arbeit verwendeten hier aufgeführt. Es wird sowohl die symbolische Schreibweise (z.B. Vektor \mathbf{a} , Tensor \mathbf{B}) als auch die Indexschreibweise (z.B. Vektor a_i , Tensor B_{ij} mit i bzw. $j = 1, 2$ für die Ebene und i bzw. $j = 1, 2, 3$ für den Raum) verwendet. Es gilt die Summenkonvention. Die Formulierung in Index-Notation erfolgt zunächst mit ko- und kontravarianten Komponenten (bei Verwendung einer kartesischen Basis ist die Unterscheidung in ko- und kontravarianten Komponenten allerdings hinfällig). Im folgenden werden einige Entsprechungen gegenüber gestellt.

Skalarprodukt von zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \hat{=} a_i b^i = c \quad (9.1)$$

Dyadisches Produkt von zwei Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} :

$$\mathbf{a} \circ \mathbf{b} \hat{=} a_i b_j = C_{ij} \quad (9.2)$$

Vektorprodukt zweier Vektoren:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \hat{=} \varepsilon_{ijk} a^j b^k = c_i \quad (9.3)$$

mit dem Permutationssymbol ε_{ijk} (siehe Schade [32]).

Skalarprodukt eines Vektors \mathbf{a} mit einem Tensor \mathbf{B} :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{B} \hat{=} a_i B^{ij} = c^j \quad (9.4)$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{a} \hat{=} B^{ij} a_j = d^i \quad (9.5)$$

Skalarprodukt von zwei Tensoren \mathbf{A} und \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \hat{=} A_{ik} B^{kj} = C_i^j \quad (9.6)$$

Doppelskalarprodukt von zwei Tensoren \mathbf{A} und \mathbf{B} :

$$\mathbf{A} \cdot \cdot \mathbf{B} \hat{=} A_{ij} B^{ji} = c \quad (9.7)$$

Doppelskalarprodukt eines Tensors vierter Stufe \mathbb{C} mit einem Tensor \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \mathbb{C} \cdot \cdot \mathbf{A} \hat{=} C_{ijkl} A^{kl} = B_{ij} \quad (9.8)$$

9.2 Differentialgeometrie

Eine Voraussetzung zur Analyse eines Flächentragwerkes ist die mathematische Beschreibung der Bezugsfläche des Tragwerks in seinen wesentlichen Eigenschaften. In der Literatur zur Schalentheorie findet man ausführliche Erläuterungen zu diesem Thema (siehe z.B. Basar & Krätzig [1]). Zur Beschreibung einer Fläche kann der Ortsvektor in Abhängigkeit von zwei Flächenkoordinaten q^1 und q^2 eingeführt werden:

$$\mathbf{x}(q^1, q^2) \quad (9.9)$$

Basisvektoren und Metriktensor: Durch Ableitung des Ortsvektors nach den Flächenkoordinaten erhält man die kovariante Basis der Fläche.

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^1} \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^2} \quad (9.10)$$

Diese Basisvektoren liegen tangential zu den Koordinatenlinien, wie in Abbildung 9.1 skizziert ist. Zur Beschreibung der Längenverhältnisse auf einer Fläche dient der Metriktensor. So gilt für das Quadrat eines differentiellen Linienelementes ds auf einer Fläche

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dq^\alpha dq^\beta \quad (9.11)$$

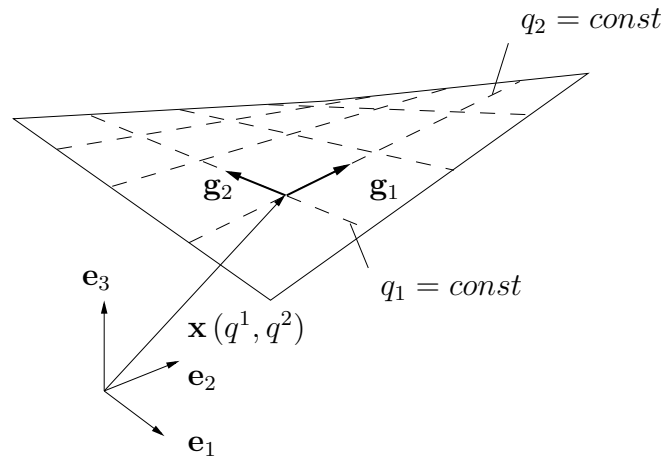


Abbildung 9.1: Flächenkoordinaten, Koordinatenlinien und kovariante Basis einer Fläche

Die griechischen Indizes laufen über die Werte 1 und 2. $g_{\alpha\beta}$ sind die kovarianten Komponenten des symmetrischen Metriktensors der Fläche, die sich folgendermaßen berechnen lassen:

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta \quad (9.12)$$

Die Determinante des Metriktensors ist

$$\det(g_{\alpha\beta}) = g_{11}g_{22} - g_{12}g_{21} \quad (9.13)$$

Für die sogenannten kontravarianten Komponenten des Metriktensors gilt die Definition

$$g_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta \quad (9.14)$$

Man kann eine weitere Basis, die kontravariante Basis \mathbf{g}^α , definieren, die ebenfalls in der Tangentialebene der Fläche liegt:

$$\mathbf{g}^\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta = \delta_\beta^\alpha \quad (9.15)$$

Der Nabla-Operator: Bezogen auf die Koordinaten der Fläche q^α mit der zugehörigen kontravarianten Basis \mathbf{g}^α lautet der planare Nabla-Operator

$$\nabla = \mathbf{g}^\alpha \frac{\partial}{\partial q^\alpha} \quad (9.16)$$

Flächenelement: Ein differentielles Flächenelement, das durch die gerichteten Linienelemente

$$ds_1 = \mathbf{g}_1 dq^1 \quad ds_2 = \mathbf{g}_2 dq^2 \quad (9.17)$$

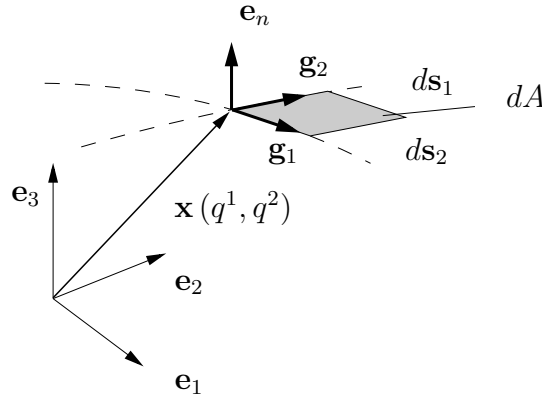


Abbildung 9.2: Flächenelement

aufgespannt wird (siehe Abbildung 9.2) soll beschrieben werden. Für ein gerichtetes Flächenelement (oder auch Flächenvektor)

$$d\mathbf{A} = dA \mathbf{e}_n \quad (9.18)$$

mit dem Normaleneinheitsvektor der Fläche \mathbf{e}_n gilt

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{s}_1 \times d\mathbf{s}_2 = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} dq^1 dq^2 \mathbf{e}_n \quad (9.19)$$

Der Flächeninhalt des Flächenelementes ist

$$dA = \sqrt{\det(g_{\alpha\beta})} dq^1 dq^2 \quad (9.20)$$

9.3 Beschreibung des Deformationszustandes

Zur Analyse des Deformationszustandes einer Membran wird die Momentankonfiguration (MKF) und eine Referenzkonfiguration (RKF) betrachtet. Es soll hier von einer ebenen Referenzkonfiguration ausgegangen werden. Dies ist zwar nicht zwingend erforderlich, im Hinblick auf die Herstellung von Membranstrukturen mittels Schnittmuster, jedoch sehr zweckmäßig.

Ein gerichtetes materielles Linienelement der Referenz $d\mathbf{X}$ geht durch Bewegungsprozesse in ein Linienelement $d\mathbf{x}$ in der Momentankonfiguration über.

Deformationsgradient: Dieser Bewegungsprozeß wird durch den Deformationsgradienten \mathbf{F} beschrieben (eine Starrkörpertranslation ist in \mathbf{F} nicht enthalten).

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{X} \quad \text{bzw.} \quad dx_i = F_{i\alpha} dX_\alpha \quad (9.21)$$

Es gilt für i , und im weiteren für alle anderen der lateinischen Indizes, $i = 1, 2, 3$. Griechische Indizes können die Werte 1 und 2 annehmen, d.h hier $\alpha = 1, 2$. Der Deformationsgradient ist definiert als

$$\mathbf{F} = \mathbf{x} \circ \nabla \quad (9.22)$$

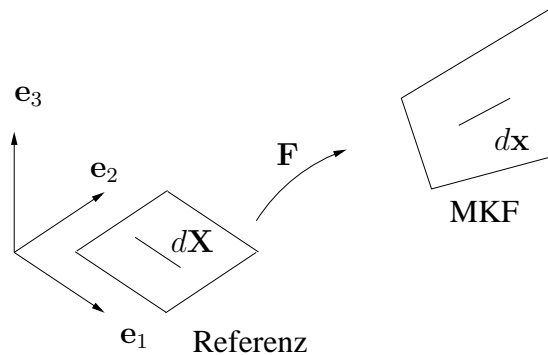


Abbildung 9.3: Abbildung eines Linienelementes von der Referenz in die Momentan-konfiguration

Da die Abbildung aus der Ebene in den Raum erfolgt, hat die Komponentenmatrix des Deformationsgradienten die Dimension 3×2 .

Wie in der Kontinuumsmechanik üblich (siehe z.B. Malvern [21], Becker & Bürger [4]), kann eine polare Zerlegung des Deformationsgradienten in einen Drehtensor \mathbf{R} und einen Strecktensor vorgenommen werden:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad \text{bzw.} \quad F_{i\alpha} = R_{i\beta} U_{\beta\alpha} = V_{ij} R_{j\alpha} \quad (9.23)$$

Die polare Zerlegung ist in Abbildung 9.4 illustriert. Wie der Deformationsgradient \mathbf{F} , so hat auch \mathbf{R} eine Komponentenmatrix von der Dimension 3×2 .

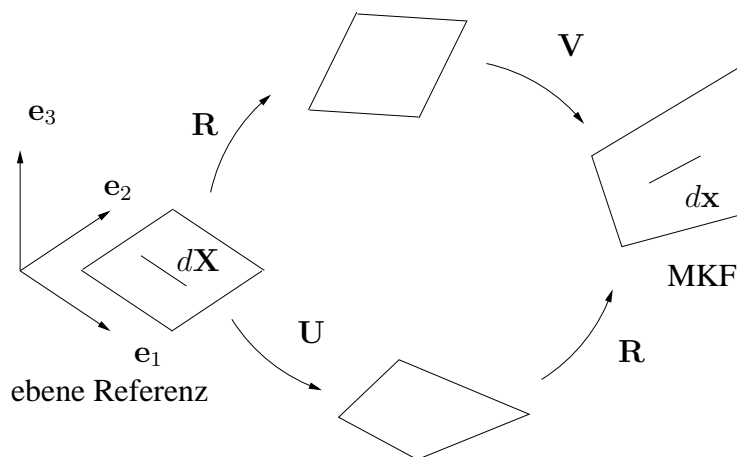


Abbildung 9.4: Interpretation der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten

Dehnungsmaße: Die Strecktensoren sind unter den Bezeichnungen rechter Strecktensor \mathbf{U} bzw. linker Strecktensor \mathbf{V} bekannt. Es lassen sich nun weitere Dehnungsmaße definieren (siehe Krawietz [16]). Die in dieser Arbeit verwendeten Dehnungsmaße

werden hier aufgeführt. Bei den im folgenden in Indexschreibweise notierten Dehnungen beziehen sich die Komponenten auf die kartesische Basis der Referenz \mathbf{e}_α . Der rechte Cauchy Green Dehnungstensor \mathbf{C} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} \quad \text{bzw.} \quad C_{\alpha\beta} = F_{i\alpha} F_{i\beta} = U_{\alpha\gamma} U_{\gamma\beta} \quad (9.24)$$

Der Greensche Verzerrungstensor \mathbf{D} :

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} - \mathbf{E}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{E}) \\ \text{bzw.} \quad D_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (F_{i\alpha} F_{i\beta} - \delta_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \end{aligned} \quad (9.25)$$

\mathbf{E} ist der planare Einheitstensor, der sich in Indexschreibweise als $\delta_{\alpha\beta}$ schreibt. Sowohl $U_{\alpha\beta}$ als auch $C_{\alpha\beta}$ und $D_{\alpha\beta}$ beziehen sich auf die kartesische Basis der Referenzebene \mathbf{e}_α .

9.4 Membrankräfte

In einer Membran treten als einzige Schnittlasten Membrankräfte auf. Querkräfte und Momente werden im Rahmen der Membrantheorie vernachlässigt. Außerdem wird der ebene Spannungszustand (ESZ) angenommen. Als Spannungsmaße werden hier die wahren Spannungen oder auch Cauchy Spannungen (bezogen auf ein natürliches Basissystem analog zu Abbildung 9.5)

$$T_{ij}^C \hat{=} \begin{pmatrix} T_{11}^C & T_{12}^C & 0 \\ T_{12}^C & T_{22}^C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.26)$$

und die 2. Piola Kirchhoff Spannungen (bezogen auf eine kartesische Basis in der RKF)

$$T_{ij} \hat{=} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{12} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.27)$$

mit $i, j = 1, 2, 3$ verwendet. Wegen des ebenen Spannungszustandes sind die planaren Anteile der Spannungstensoren ausreichend, um den Spannungszustand zu beschreiben. Aus dem planaren Anteil dieser dreidimensionalen Spannungstensoren ergeben sich die Schnittlasten der Membran und zwar der Cauchy Membrankrafttensor \mathbf{S}^C (hier mit Bezug auf die kontravariante Basis \mathbf{g}^α der Fläche in der Momentankonfiguration angegeben)

$$\mathbf{S}^C = S_{\alpha\beta}^C \mathbf{g}^\alpha \circ \mathbf{g}^\beta = \tilde{h} T_{\alpha\beta}^C \mathbf{g}^\alpha \circ \mathbf{g}^\beta \quad (9.28)$$

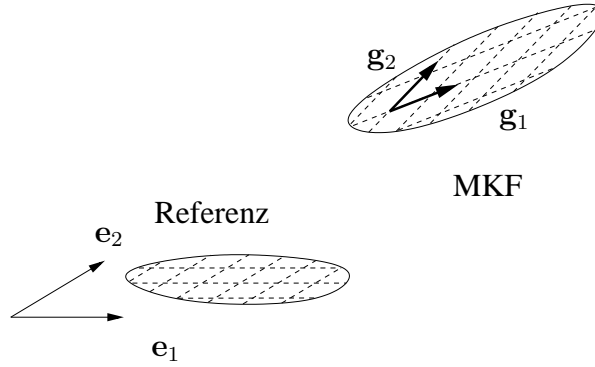


Abbildung 9.5: Kartesische Basis der RKF und kovariante Basisvektoren in der MKF

und der 2. Piola Kirchhoff Membrankrafttensor \mathbf{S} (hier mit Bezug auf die kartesische Basis der ebenen Referenz \mathbf{e}_α , siehe Abbildung 9.5)

$$\mathbf{S} = S_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta = h T_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}_\beta \quad (9.29)$$

\tilde{h} und h sind die Membrandicken in der aktuellen Lage bzw. in der Referenz.

Die Frage ist zu klären, welcher Zusammenhang zwischen den oben eingeführten Membrankrafttensoren besteht. Abbildung 9.6 stellt den Kraftvektor $d\mathbf{k}^C$ dar, der aus dem Linienelement ds einer Schnittlinie in der Momentankonfiguration austritt. Der Vektor $\mathbf{e}_{M\perp}$ liegt in der Tangentialebene der Membran und steht senkrecht auf der Schnittlinie.

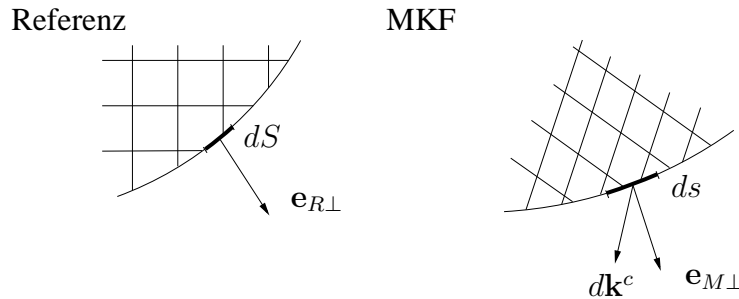


Abbildung 9.6: Membranschnittlasten in der Referenz- und der Momentankonfiguration

Der Kraftvektor kann durch den Cauchy Membrankrafttensor wie folgt ausgedrückt werden:

$$d\mathbf{k}^C = ds \mathbf{e}_{M\perp} \cdot \mathbf{S}^C \quad (9.30)$$

Ein weiterer Membrankrafttensor kann definiert werden, in dem man die Schnittkraft $d\mathbf{k}^C$ auf die Länge dS und die Richtung $\mathbf{e}_{R\perp}$ der Referenzkonfiguration bezieht (siehe Abbildung 9.6):

$$d\mathbf{k}^C = dS \mathbf{e}_{R\perp} \cdot \mathbf{S}^{1PK} \quad (9.31)$$

Bei der Größe \mathbf{S}^{1PK} handelt es sich um die 1. Piola-Kirchhoff Membrankräfte. Bauer gibt in [3] die Transformation der Vektorgrößen $dS \mathbf{e}_{R\perp}$ und $ds \mathbf{e}_{M\perp}$ an:

$$ds \mathbf{e}_{M\perp} = \frac{da}{dA} dS \mathbf{e}_{R\perp} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (9.32)$$

bzw.

$$dS \mathbf{e}_{R\perp} = \frac{dA}{da} ds \mathbf{e}_{M\perp} \cdot \mathbf{F} \quad (9.33)$$

Hierbei ist da ein Flächenelement der aktuellen Lage und dA ein Flächenelement in der Referenzkonfiguration. Zu beachten ist, daß es sich bei Gleichung 9.32 bzw. 9.33 nicht um die Transformation eines materiellen Linienelementes handelt. Aus Gleichung 9.31 und 9.33 erhält man die Beziehungen zwischen den beiden Membrankraftgrößen \mathbf{S}^C und \mathbf{S}^{1PK}

$$\mathbf{S}^{1PK} = \frac{da}{dA} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S}^C \quad (9.34)$$

bzw.

$$\mathbf{S}^C = \frac{dA}{da} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}^{1PK} \quad (9.35)$$

Multipliziert man den 1. Piola Kirchhoff Membrankrafttensor rechtsseitig skalar mit \mathbf{F}^{-T} , so erhält man den symmetrischen 2. Piola Kirchhoff Membrankrafttensor

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^{1PK} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (9.36)$$

Die Cauchy Membrankräfte und die 2. Piola Kirchhoff Membrankräfte verhalten sich somit wie folgt zu einander:

$$\mathbf{S} = \frac{da}{dA} \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{S}^C \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (9.37)$$

bzw.

$$\mathbf{S}^C = \frac{dA}{da} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (9.38)$$

9.5 Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (P.d.v.V.) ist eine den statischen Gleichgewichtsbedingungen äquivalente Aussage, Sie wird in dieser Arbeit der Ausgangspunkt für die numerische Behandlung von Membranstrukturen mittels FEM sein. Das Prinzip lautet

$$\delta A^i = \delta A^a \quad (9.39)$$

Für eine Membran mit der Referenzfläche A ist die virtuelle innere Arbeit bei Verwendung des 2. Piola Kirchhoff Membrankrafttensors und den hierzu energetisch konsistenten Greenschen Verzerrungen (siehe [3], [20])

$$\delta A^i = \int_A \mathbf{S} \cdot \cdot \delta \mathbf{D} \, dA \quad (9.40)$$

Die virtuelle äußere Arbeit von Flächenlasten und Randlasten bezüglich der Flächen- und Längenmaße der deformierten Membran wird mit

$$\delta A^a = \int_a \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{x} \, da + \oint \delta \mathbf{x} \cdot d\mathbf{k}^C = \int_a \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{x} \, da + \oint \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{P}^C \, ds \quad (9.41)$$

beschrieben. Hierbei sind

- \mathbf{p} der Vektor Flächenlast auf der Membran
- da, a das Flächendifferential und die Fläche in der MKF
- \mathbf{P}^C Vektor einer Linienlast entlang der Gebietsberandung von a mit

$$d\mathbf{k}^C = \mathbf{P}^C \, ds \quad (9.42)$$

- ds ein Bogenlängendifferential in der MKF

Die virtuelle äußere Arbeit kann in einer referenzbezogenen Darstellung angegeben werden. Hierzu wird der auf die Bogenlänge dS des unverformten Gebietsrandes bezogene Randlastvektor \mathbf{P} eingeführt

$$\mathbf{P} = \frac{ds}{dS} \mathbf{P}^C \quad (9.43)$$

der sich zum Kraftvektor $d\mathbf{k}^C$ folgendermaßen verhält:

$$d\mathbf{k}^C = \mathbf{P} \, dS \quad (9.44)$$

Desweiteren werden die Flächenlasten auf die Referenzfläche umgerechnet

$$\mathbf{q} = \frac{da}{dA} \mathbf{p} \quad (9.45)$$

und es ergibt sich für die virtuelle äußere Arbeit

$$\delta A^a = \int_A \mathbf{q} \cdot \delta \mathbf{x} \, dA + \oint \delta \mathbf{x} \cdot \mathbf{P} \, dS \quad (9.46)$$

Für einige Belastungsarten z.B. Gewichtsbelastung kann diese Darstellung sehr zweckmäßig sein.

9.6 Materialgesetze

9.6.1 Linear-elastisches Materialverhalten

In der geometrisch nichtlinearen Theorie ist die Bezeichnung des Materialverhaltens mit “linear” nicht eindeutig, da es zahlreiche Spannungs- und Dehnungsmaße gibt, die miteinander verknüpft werden können. In dieser Arbeit ist unter einem linearen Materialverhalten eine lineare Beziehung zwischen dem 2. Piola Kirchhoff Spannungstensor und dem Greenschen Dehnungstensor bzw. dem 2. Piola Kirchhoff Membrankrafttensor und den planaren Greenschen Dehnungen zu verstehen. Zur Beschreibung des Materialverhaltens mit dem Membrankrafttensor und den planaren Dehnungen wird der Elastizitätstensor \mathbb{C} (in Index-Notation $C_{\alpha\beta\gamma\delta}$) eingeführt:

$$\mathbf{S} = \mathbb{C} \cdot \cdot \mathbf{D} \quad (9.47)$$

bzw. in Index-Notation

$$S_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} D_{\gamma\delta} \quad (9.48)$$

Voigt Notation: Bei der Beschreibung des Materialverhaltens ist die Voigt Notation

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{12} & V_{22} & V_{23} \\ V_{13} & V_{23} & V_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (9.49)$$

häufig sehr zweckmäßig. Die Beziehungen der Komponenten des Membrankraftvektors und des Dehnungsvektors mit den entsprechenden Tensorkomponenten lauten wie üblich:

$$\sigma_1 = S_{11} \quad \sigma_2 = S_{22} \quad \tau = S_{12} \quad (9.50)$$

$$\varepsilon_1 = D_{11} \quad \varepsilon_2 = D_{22} \quad \gamma = 2D_{12} \quad (9.51)$$

Die Komponenten des Elastizitätstensors und der symmetrischen Voigtschen Matrix stehen in folgender Beziehung:

$$\begin{aligned} V_{11} &= C_{1111} \\ V_{22} &= C_{2222} \\ V_{33} &= C_{1212} = C_{1221} = C_{2112} = C_{2121} \\ V_{12} &= C_{1122} = C_{2211} \\ V_{13} &= C_{1112} = C_{1121} = C_{1211} = C_{2111} \\ V_{23} &= C_{1222} = C_{2122} = C_{2212} = C_{2221} \end{aligned} \quad (9.52)$$

Orthotropes Material: Membranstrukturen bestehen oft aus Geweben, die orthotropes Materialverhalten aufweisen. Im Fall der Orthotropie ist die Voigt Matrix nicht mehr vollständig besetzt und es gilt

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} & 0 \\ V_{12} & V_{22} & 0 \\ 0 & 0 & V_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma \end{pmatrix} \quad (9.53)$$

Das Materialverhalten ist mit vier Konstanten beschrieben. Verwendet man zur Beschreibung des Materialverhaltens die E-Moduli E_1 , E_2 , den Schubmodul G_{12} und die Querkontraktionszahlen ν_1 , ν_2 mit

$$E_1 \nu_2 = E_2 \nu_1 \quad (9.54)$$

dann gilt für die MembranstEIFigkeiten V_{ij}

$$V_{ij} \hat{=} \begin{bmatrix} \frac{E_1 h}{1-\nu_1 \nu_2} & \frac{\nu_2 E_1 h}{1-\nu_1 \nu_2} & 0 \\ \frac{\nu_2 E_1 h}{1-\nu_1 \nu_2} & \frac{E_2 h}{1-\nu_1 \nu_2} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} h \end{bmatrix} \quad (9.55)$$

h ist die Membrandicke in der Referenzkonfiguration.

Ein spezielles orthotropes Materialgesetz mit nur drei Materialkonstanten findet man bei Roddeman [30]. Dieses Materialgesetz soll in dieser Arbeit ebenfalls Anwendung finden.

$$V_{ij} \hat{=} \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} f & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (9.56)$$

E ist der E-Modul. ν ist ein Kennwert mit dem Charakter einer Querkontraktionszahl. f bestimmt das Maß der Anisotropie.

Isotropes Material: Ein isotropes Material wird hier mit dem E-Modul E der Querkontraktionszahl ν beschrieben. Die Voigt Matrix lautet somit

$$V_{ij} \hat{=} \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (9.57)$$

Für den Schubmodul gilt

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (9.58)$$

9.6.2 Ein orthotropes, nichtlinear elastisches Material

Als ein Beispiel für nichtlinear elastisches, orthotropes Materialverhalten soll ein Material mit der spezifischen Formänderungsenergie der Membran

$$\begin{aligned}
 W = & \frac{1}{2} [a_1 D_{11}^2 + 2a_3 D_{11}D_{22} + a_2 D_{22}^2 + G (D_{12} + D_{21})^2] \\
 & + a_4 D_{11}^3 + a_5 D_{11}^2 D_{22} + a_6 D_{22}^2 D_{11} + a_7 D_{22}^3 \\
 & + a_8 D_{11}^4 + a_9 D_{11}^3 D_{22} + a_{10} D_{11}^2 D_{22}^2 + a_{11} D_{11} D_{22}^3 + a_{12} D_{22}^4 \quad (9.59)
 \end{aligned}$$

dienen. G ist der Schubmodul, a_1 bis a_{12} sind weitere Materialkonstanten.

Die Membrankräfte erhält man aus den partiellen Ableitungen der Formänderungsenergie W nach den planaren Dehnungen $D_{\alpha\beta}$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{\partial W}{\partial D_{\alpha\beta}} \quad (9.60)$$

Die Membrankräfte sind im einzelnen:

$$\begin{aligned}
 S_{11} = & a_1 D_{11} + a_3 D_{22} + 3a_4 D_{11}^2 + 2a_5 D_{11}D_{22} + a_6 D_{22}^2 + \\
 & + 4a_8 D_{11}^3 + 3a_9 D_{11}^2 D_{22} + 2a_{10} D_{11} D_{22}^2 + a_{11} D_{22}^3 \quad (9.61)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S_{22} = & a_2 D_{22} + a_3 D_{11} + a_5 D_{11}^2 + 2a_6 D_{11}D_{22} + 3a_7 D_{22}^2 + \\
 & + a_9 D_{11}^3 + 2a_{10} D_{11}^2 D_{22} + 3a_{11} D_{11} D_{22}^2 + 4a_{12} D_{22}^3 \quad (9.62)
 \end{aligned}$$

$$S_{12} = 2G D_{12} \quad (9.63)$$

Die Membransteifigkeiten für dieses Materialgesetz ergeben sich aus den partiellen Ableitungen der Membrankräfte $S_{\alpha\beta}$ nach den planaren Dehnungen $D_{\gamma\delta}$

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{\partial S_{\alpha\beta}}{\partial D_{\gamma\delta}} \quad (9.64)$$

oder in symbolischer Darstellung

$$\mathbb{C} = \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{D})}{\partial \mathbf{D}} \quad (9.65)$$

Die aus der Formänderungsenergie Gleichung 9.59 folgenden, von Null verschiedenen Steifigkeiten sind hier angegeben:

$$\begin{aligned}
 C_{1111} &= a_1 + 6a_4 D_{11} + 2a_5 D_{22} + \\
 &\quad + 12a_8 D_{11}^2 + 6a_9 D_{11}D_{22} + 2a_{10} D_{22}^2 \\
 C_{2222} &= a_2 + 2a_6 D_{11} + 6a_7 D_{22} + \\
 &\quad + 2a_{10} D_{11}^2 + 6a_{11} D_{11}D_{22} + 12a_{12} D_{22}^2 \\
 C_{1122} &= a_3 + 2a_5 D_{11} + 2a_6 D_{22} + \\
 &\quad + 3a_9 D_{11}^2 + 4a_{10} D_{11}D_{22} + 3a_{11} D_{22}^2 \\
 C_{2211} &= C_{1122} \\
 C_{1212} &= C_{1221} = G \\
 C_{2112} &= C_{2121} = G
 \end{aligned}$$

9.6.3 Elastisch–plastisches Materialverhalten

In dieser Arbeit wird als Beispiel eines elastisch–plastischen Materialverhaltens ein Materialgesetz von Besdo [5] und Tietze [40] verwendet. Es handelt sich hierbei um eine Formulierung der von Mises Plastizität im Dehnungsraum, die große plastische Verformungen erfassen kann. Die Beschreibung erfolgt mit dem 3D–Deformationsgradienten F_{ij} , dem 3D–Verzerrungstensor C'_{ij} und dem 2. Piola Kirchhoff Spannungstensor T_{ij} . Die Theorie wird mit dem Radial Return Verfahren numerisch umgesetzt. Dieses Verfahren ist von Verhoeven [41] für diese spezielle Materialbeschreibung modifiziert worden. In dieser Arbeit wird der ebene Spannungszustand durch einen iterativen Prozeß aus dem 3D–Materialgesetz ermittelt (siehe Kapitel 3.8).

Kinematik plastischer Deformationen: Die Theorie von Besdo und Tietze basiert auf der multiplikativen Zerlegung des Deformationsgradienten F_{ij} in einen plastischen Anteil \hat{F}_{ij} und einen elastischen Anteil F_{ij}^e .

$$F_{ij} = F_{ik}^e \hat{F}_{kj} \quad (9.66)$$

Das Dach (^) kennzeichnet Größen der Zwischenkonfiguration, (^e) Größen, die den Übergang von der Zwischen- zur Momentankonfiguration beschreiben. Gleichung 9.66 nimmt hier Bezug auf eine kartesische Basis.

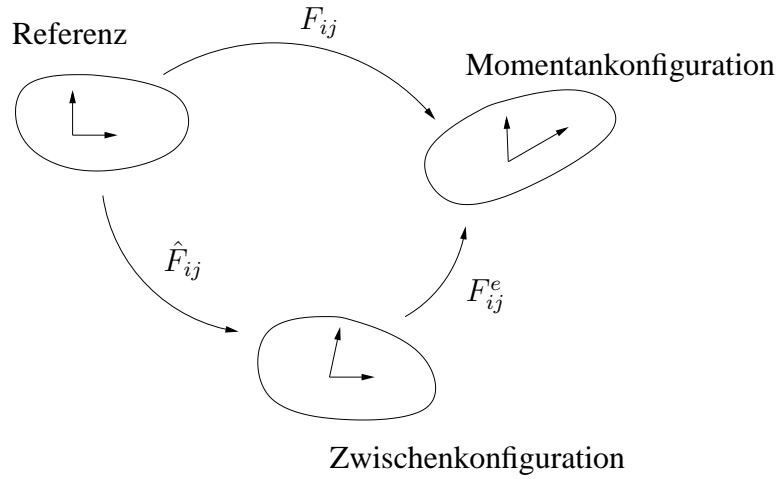


Abbildung 9.7: Konfigurationen bei elastischer und plastischer Deformation

Mit der multiplikativen Zerlegung von F_{ij} wird eine Zwischenkonfiguration eingeführt (siehe Abbildung 9.7), die spannungsfrei ist und somit keinerlei elastische Deformationen beinhaltet. Dieses Konzept ist in der Literatur viel diskutiert worden (siehe z.B. [11], [6], [16]).

Auf Grundlage der multiplikativen Zerlegung Gleichung 9.66 können nun formal die rechten Cauchy Green Strecktensoren und Greenschen Verzerrungstensoren der plastischen Deformation

$$\hat{C}_{ij} = \hat{F}_{ki} \hat{F}_{kj} \quad (9.67)$$

$$\hat{D}_{ij} = \frac{1}{2} (\hat{C}_{ij} - \delta_{ij}) \quad (9.68)$$

und der elastischen Deformation

$$C^e = F_{ki}^e F_{kj}^e \quad (9.69)$$

$$D^e = \frac{1}{2} (C_{ij}^e - \delta_{ij}) \quad (9.70)$$

eingeführt werden. Die Zusammenhänge zwischen den Dehnungsgrößen der drei Konfigurationen lauten:

$$C_{ij} = \hat{F}_{ki} C_{kl}^e \hat{F}_{lj} \quad (9.71)$$

$$D_{ij} = \hat{D}_{ij} + \hat{F}_{ki} D_{kl}^e \hat{F}_{lj} \quad (9.72)$$

Besdo und Tietze zeigen, daß die Invarianten von C_{ij}^e und $\hat{C}_{ik}^{-1} C_{kj}$ gleich sind. Es gilt somit

$$C_{ii}^e = \hat{C}_{ij}^{-1} C_{ji} \quad (9.73)$$

$$C_{ij}^e C_{ji}^e = \hat{C}_{ik}^{-1} C_{kj} \hat{C}_{jl}^{-1} C_{li} \quad (9.74)$$

$$C_{ij}^e C_{jk}^e C_{ki}^e = \hat{C}_{ik}^{-1} C_{kj} \hat{C}_{jl}^{-1} C_{lm} \hat{C}_{mn}^{-1} C_{ni} \quad (9.75)$$

Diese Beziehungen folgen aus kinematischen Betrachtungen und sind folglich unabhängig vom Materialgesetz.

2. Piola Kirchhoff Spannungen: Das elastische Potential des Materials ist

$$\phi = \frac{G}{4\rho} \{ (C_{ij}^e - \delta_{ij}) (C_{ji}^e - \delta_{ji}) + \frac{\nu}{1-2\nu} [(C_{ij}^e - \delta_{ij}) \delta_{ji}]^2 \} \quad (9.76)$$

(siehe Verhoeven [41]). In einer Formulierung mit dem rechten Cauchy Green Strecktensor C_{ij} und den inversen plastischen Dehnungen \hat{C}_{ij}^{-1} sowie bei Berücksichtigung der Gleichungen 9.73 bis 9.75 kann das Potential mit

$$\phi = \frac{G}{4\rho} \{ (\hat{C}_{ik}^{-1} C_{kj} - \delta_{ij}) (\hat{C}_{jl}^{-1} C_{li} - \delta_{ji}) + \frac{\nu}{1-2\nu} [(\hat{C}_{ik}^{-1} C_{kj} - \delta_{ij}) \delta_{ji}]^2 \} \quad (9.77)$$

angegeben werden. Wie üblich sind G der Schubmodul und ν die Querkontraktionszahl. ρ ist die Dichte in der Referenzkonfiguration. Das Material ist hinsichtlich seiner elastischen Eigenschaften isotrop. Mit dem elastischen Potential ϕ erhält man das elastische Teilstoffgesetz aus partiellen Ableitungen nach C_{ij} . Die 2. Piola Kirchhoff Spannungen T_{ij} sind

$$T_{ij} = 2\rho \frac{\partial \phi}{\partial C_{ij}} = G \left[\hat{C}_{il}^{-1} C_{lk} \hat{C}_{kj}^{-1} - \hat{C}_{ij}^{-1} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\hat{C}_{kl}^{-1} C_{lk} - 3) \hat{C}_{ij}^{-1} \right] \quad (9.78)$$

Mit der Ableitung $2\rho \frac{\partial \phi}{\partial C_{ij}^e}$ erhält man die auf die Zwischenkonfiguration bezogenen Spannungen \hat{T}_{ij} . Bei einem gegebenen Dehnungszustand C_{ij} ist der Anteil der plastischen Dehnungen anfangs unbekannt, so daß zur Bestimmung des Spannungszustandes mit Gleichung 9.78 zuvor die Größen \hat{C}_{ij}^{-1} ermittelt werden müssen.

Die Fließbedingung gibt darüber Auskunft, inwieweit sich plastische Dehnungen einstellen. Im Dehnungsraum lautet die Fließbedingung (oder auch Konsistenzbedingung)

$$g = \frac{1}{4} \left[\hat{C}_{ik}^{-1} C_{kj} \hat{C}_{jl}^{-1} C_{li} - \frac{1}{3} (\hat{C}_{ij}^{-1} C_{ji})^2 \right] - y^2 \quad (9.79)$$

Hierbei ist y die Fließdehnung, analog zur von Misesschen Fließspannung, die hier im weiteren mit Y bezeichnet wird. Bei der Fließbedingung Gleichung 9.79 sind die folgenden drei Zustände zu unterscheiden:

$$g < 0 \quad \text{elastischer Zustand} \quad (9.80)$$

$$g = 0 \quad \text{plastischer Zustand} \quad (9.81)$$

$$g > 0 \quad \text{unzulässiger Zustand} \quad (9.82)$$

Ziel ist es nun, die inversen plastischen Verzerrungen \hat{C}_{ij}^{-1} so zu ermitteln, daß eine Verletzung der Konsistenzbedingung ausgeschlossen wird. Als Gesetz für die isotrope Verfestigung des Materials in Abhängigkeit von der akkumulierten plastischen Dehnung $\hat{\varphi}$ wird

$$y = \frac{1+\nu}{E} \sqrt{\frac{2}{3}} Y \quad \text{mit} \quad Y = Y_0 \sqrt[8]{1 + \frac{2.04 \hat{\varphi} E}{Y_0}} \quad (9.83)$$

angenommen (siehe [41]). Es sind Y_0 die Fließspannung zu Beginn des plastischen Deformationsprozesses, Y die Fließspannung des verfestigten Materials und E der E-Modul. Die akkumulierte plastische Dehnung $\hat{\varphi}$ ist nach Tietze [40]

$$\hat{\varphi} = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{1}{6} \hat{C}_{ij} \dot{\hat{C}}_{jk}^{-1} \hat{C}_{kl} \dot{\hat{C}}_{li}^{-1}} d\hat{t} \quad (9.84)$$

In Verbindung mit einer Normalenregel wird hier das Radial Return Verfahren zur Bestimmung von \hat{C}_{ij}^{-1} verwendet.

Radial Return: Grundidee des Radial Return Verfahrens ist, nach einer Verletzung der Konsistenzbedingung (d.h. $g > 0$), die Rückkehr auf die Fließfläche ($g = 0$) im Dehnungsraum in radialer Richtung zu bewerkstelligen (siehe Abbildung 9.8). Dazu

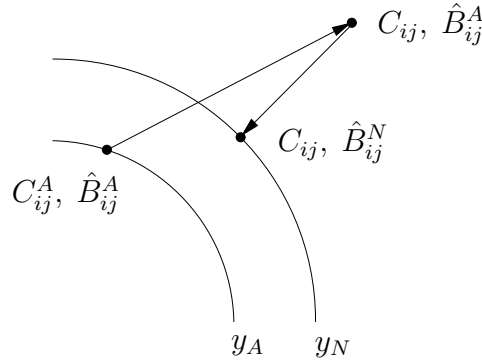


Abbildung 9.8: Auffinden der plastischen Dehnungen mit Radial Return

wird bei gegebenen Verzerrungen und bekannten inversen plastischen Dehnungen aus dem vorangegangenen Lastschritt ein “Abstand” \mathcal{A} zur Fließfläche definiert, der minimiert werden soll. Im weiteren soll die Bezeichnung \hat{B}_{ij} für die inversen plastischen Cauchy Green Verzerrungen

$$\hat{B}_{ij} = \hat{C}_{ij}^{-1}$$

verwendet werden. Entsprechend Verhoeven [41] ist

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4} \left\{ \left(\hat{B}_{ij}^N - \hat{B}_{ij}^A \right) C_{jk} \left(\hat{B}_{kl}^N - \hat{B}_{kl}^A \right) C_{li} + \frac{\nu}{1 - 2\nu} \left[\left(\hat{B}_{ij}^N - \hat{B}_{ij}^A \right) C_{ji} \right]^2 \right\} \Rightarrow \min. \quad (9.85)$$

\hat{B}_{ij}^A sind die inversen plastischen Cauchy Green Verzerrungen aus dem letzten Lastschritt und \hat{B}_{ij}^N die noch zu bestimmenden neuen inversen plastischen Cauchy Green

Verzerrungen. Zusammen mit der Konsistenzbedingung ergibt das ein Sattelpunktproblem.

$$\begin{aligned}
 L(\hat{B}_{ij}^N, \lambda) = & \frac{1}{4} \left\{ \left(\hat{B}_{ij}^N - \hat{B}_{ij}^A \right) C_{jk} \left(\hat{B}_{kl}^N - \hat{B}_{kl}^A \right) C_{li} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[\left(\hat{B}_{ij}^N - \hat{B}_{ij}^A \right) C_{ji} \right]^2 \right\} + \\
 & + \lambda \left\{ \frac{1}{4} \left[\hat{B}_{ik}^N C_{kj} \hat{B}_{jl}^N C_{li} - \frac{1}{3} \left(\hat{B}_{ij}^N C_{ji} \right)^2 \right] - y_N^2 \right\} \Rightarrow stat. \quad (9.86)
 \end{aligned}$$

In einem Lösungspunkt des Sattelpunktproblems müssen die partiellen Ableitungen nach den Unbekannten \hat{B}_{ij}^N und dem Lagrange Multiplikator λ verschwinden.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial L}{\partial \hat{B}_{rs}^N} = & \frac{1}{2} \left\{ C_{sk} \left(\hat{B}_{kl}^N - \hat{B}_{kl}^A \right) C_{lr} + \frac{\nu}{1-2\nu} \left[\left(\hat{B}_{kl}^N - \hat{B}_{kl}^A \right) C_{lk} \right] C_{sr} \right\} + \\
 & + \lambda \left\{ \frac{1}{2} \left[C_{sk} \hat{B}_{kl}^N C_{lr} - \frac{1}{3} \left(\hat{B}_{kl}^N C_{lk} \right) C_{rs} \right] - \frac{\partial y_N^2}{\partial \hat{B}_{rs}^N} \right\} = 0 \quad (9.87)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g = \frac{1}{4} \left[\hat{B}_{ik}^N C_{kj} \hat{B}_{jl}^N C_{li} - \frac{1}{3} \left(\hat{B}_{ij}^N C_{ji} \right)^2 \right] - y_N^2 = 0 \quad (9.88)$$

Diese nichtlinearen Gleichungen für \hat{B}_{ij}^N und λ werden mit dem Newton Verfahren gelöst. Die Ableitung $\frac{\partial y_N^2}{\partial \hat{B}_{rs}^N}$ erhält man aus dem Verfestigungsgesetz Gleichung 9.83 und aus einer Näherung der akkumulierten plastischen Verzerrung (siehe [41]).

$$\hat{\varphi}_N \approx \hat{\varphi}_A + \sqrt{\frac{1}{6} \hat{C}_{ij} \left(\hat{B}_{jk}^N - \hat{B}_{jk}^A \right) \hat{C}_{kl} \left(\hat{B}_{li}^N - \hat{B}_{li}^A \right)} \quad (9.89)$$

Details zur numerischen Lösung des Gleichungssystems findet man bei Verhoeven [41]. Für die Ermittlung der konsistenten Materialsteifigkeit

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial D_{kl}}$$

muß beachtet werden, daß neben dem direkten Einfluß einer Änderung von D_{kl} bzw. C_{kl} auf die Spannungen T_{ij} in Gleichung 9.78 auch Auswirkungen auf die Spannungen durch Beeinflussung der plastischen Dehnungen \hat{C}_{nm} auftreten. An dieser Stelle muß dann auch die Verfestigung des Materials berücksichtigt werden. Die Programmierung der konsistenten Steifigkeit ist relativ aufwendig. Für Details wird auch hier wieder auf Verhoeven [41] verwiesen.

Kapitel 10

Symbolverzeichnis

Indizes: In dieser Arbeit werden lateinische Indizes in der Regel zur Beschreibung räumlicher, dreidimensionaler Größen verwendet, griechische Indizes hingegen für planare, zweidimensionale Größen benutzt. So gilt z.B. $i, j, k, m, n = 1, 2, 3$ und $\alpha, \beta, \Lambda = 1, 2$. Gelegentlich kennzeichnen lateinische Indizes auch die Knotennummern eines finiten Elementes. In diesem Falle hängt es von der Knotenanzahl des Elementes ab, welche Werte der Index annehmen kann.

Abkürzungen: Die Abkürzungen RKF, MKF, ZKF verweisen auf die Referenzkonfiguration, die Momentankonfiguration (aktuelle Lage) bzw. auf die Zwischenkonfiguration (siehe z.B. Abbildung 2.1 oder 5.1). Bei der Beschreibung von Spannungs- bzw. Membrankraftgrößen steht das Kürzel PK für Piola Kirchhoff.

10.1 Lateinische Symbole

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
A, a	Elementfläche in der RKF und der MKF	–	6
a	Membranbreite	–	27
$a_1 \dots a_{12}$	Materialkonstanten	9.59	100
$\hat{B}_{ij}^A, \hat{B}_{ij}^N$	inverse plastische Verzerrungen	9.85	104
\mathbf{C}	rechter Cauchy Green Strecktensor 2D	9.24	19, 94
$\hat{\mathbf{C}}$	plastische Cauchy Green Verzerrung 2D	5.2	48
\mathbf{C}_e	elastische Cauchy Green Verzerrung 2D	5.4	48
\mathbf{C}'_e	korrigierte, elastische Cauchy Green Dehnung 2D	5.22	53
\hat{C}_{ij}	plastische Cauchy Green Verzerrungen 3D	9.67	102
C_{ij}^e	elastische Cauchy Green Verzerrungen 3D	9.69	102
$C_{e,I}, C_{e,II}$	elastische Cauchy Green Hauptmembrandehnung	–	49
$C_{\alpha\beta\gamma\delta}, \mathbb{C}$	Membransteifigkeiten	9.47	98

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
D	Dickenverzerrung D'_{33}	–	32
$\mathbf{D}, D_{\alpha\beta}$	Greenscher Membranverzerrungstensor	2.6	7
$\hat{\mathbf{D}}$	plastischer Greenscher Dehnungstensor 2D	5.3	48
\mathbf{D}_e	elastischer Greenscher Dehnungstensor 2D	5.5	48
\mathbf{D}'	korrigierte Greensche Membrandehnung	3.11	20
\hat{D}_{ij}	plastische Greensche Dehnungen 3D	9.68	102
D_{ij}^e	elastische Greensche Dehnungen 3D	9.70	102
D_I, D_{II}	Greensche Hauptmembrandehnungen	–	15
$D_{e,I}, D_{e,II}$	elastische Greensche Hauptmembrandehnungen	–	49
E, E_1, E_2	Elastizitätsmoduli	–	99
\mathbf{E}	planarer Einheitstensor	–	94
\mathbf{E}_3	räumlicher Einheitstensor	–	18
$\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_\alpha$	kartesische Basisvektoren 3D und 2D	–	6, 91
f	Orthotropieparameter	9.56	99
$\mathbf{F}, F_{\alpha i}$	Deformationsgradient der Membran	–	8, 93
$\tilde{\mathbf{F}}$	Deformationsgradient der gefalteten Membran	–	16
$\hat{\mathbf{F}}$	plastische Deformation der Membran	5.1	47
\mathbf{F}_e	elastische Deformation der Membran	5.1	47
\mathbf{F}'	korrigierter Deformationsgradient der Membran	3.2	16
F_{ij}	Deformationsgradient 3D	9.66	101
\hat{F}_{ij}	plastische Deformation 3D	9.66	101
F_{ij}^e	elastische Deformation 3D	9.66	101
f_1, f_2	Faltenbedingungen	3.39, 3.40	24
G, G_{12}	Schubmoduli	–	99
g	Fließbedingung	9.79	103
h, \tilde{h}	Membrandicke in der RKF bzw. MKF	–	95
\mathbf{h}	Vektor der materiellen RKF–Faltungsrichtung	3.6	19
h_k	Interpolationsfunktionen in Viereckselement	2.13	8
I_1, I_2	Invarianten von \mathbf{C}_e	5.8, 5.9	48
$k_0 \dots k_4$	Koeffizienten der Richtungsgleichung 4.14	4.14	36
M_D	Drillmoment	–	77
\mathbf{n}	Roddemansche Faltungsrichtung	–	16
\mathbf{n}_\perp	Roddemansche Zugrichtung	–	16
\mathbf{N}	Vektor der RKF–Faltungsrichtung	3.17	20
\mathbf{N}_\perp	Vektor der RKF–Zugrichtung	3.33	23
$\hat{\mathbf{N}}$	Vektor der ZKF–Faltungsrichtung	5.23	53
$\hat{\mathbf{N}}_\perp$	Vektor der ZKF–Zugrichtung	5.32	54
\mathbf{p}, p_i	Vektor bzw. Vektorkomponenten des Druckes	–	6, 97
\mathbf{p}^C	Randlastvektor der Membran	–	7, 97
p^i	Innendruck	–	–
\mathbf{q}, q_i	Vektor bzw. Vektorkomponenten des Gewichts	–	6, 97

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
q^Λ	Flächenkoordinaten	–	8
\mathbf{R}	Rotation der Membran	9.23	19, 93
$\mathbf{S}, S_{\alpha\beta}$	2. Piola Kirchhoff Membrankrafttensor	–	7
\mathbf{S}^C	Cauchy Membrankrafttensor	–	18, 94
\mathbf{S}'	korrigierte 2. Piola Kirchhoff Membrankräfte	3.25	22
$\hat{\mathbf{S}}'$	korrigierte Membrankräfte in der ZKF	5.33	54
S_I, S_{II}	2. Piola Kirchhoff Hauptmembrankräfte	–	14
T_{ij}	2. Piola Kirchhoff Spannungen	–	94
T_{ij}^C	Cauchy Spannungen	–	94
T_{ij}'	korrigierte 2. Piola Kirchhoff Spannung	–	32
ΔT	Temperaturdifferenz	6.5	58
\mathbf{U}	rechter Strecktensor 2D	9.23	19, 93
$\hat{\mathbf{U}}$	plastischer bzw. thermischer Strecktensor 2D	5.19, 6.5	53, 58
v	Scherverschiebung	–	27
V_{ij}, \mathbf{V}	Voigtsche Matrix	9.49	98
W	Formänderungsenergie	9.59	100
\mathbf{x}, x_i	Ortsvektor der aktuellen Lage (MKF)	–	6
$X_{\alpha k}, x_{ik}$	Knotenkoordinaten in RKF und MKF	–	7
y, y_0	Fließdehnung	9.83	103
Y, Y_0	Fließspannung	9.83	103

10.2 Griechische Symbole

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
α	referenzbezogene Faltungsrichtung	3.35	20
α_{11}, α_{22}	thermische Ausdehnungskoeffizienten	6.5	58
α_R	Roddemansche Faltungsrichtung	–	28, 44
$\hat{\alpha}$	ZKF-bezogene Faltungsrichtung	–	53
β	referenzbezogenes Faltenmaß	3.6	20
β_R	Roddemansches Faltenmaß	3.1	18
$\hat{\beta}$	ZKF-bezogenes Faltenmaß	5.22	53
γ	Greensche Schubverzerrung in Voigt Notation	9.51	98
δ	Variationssymbol	–	–
$\delta_{\alpha\beta}$	Kronecker Delta	–	94
$\varepsilon_I, \varepsilon_{II}$	Greensche Hauptdehnungen in Voigt Notation	–	41
$\varepsilon_1, \varepsilon_2$	Greensche Verzerrungen in Voigt Notation	9.51	98
η	Flächenkoordinate	–	8
ϑ	Drillwinkel	–	77
ν, ν_1, ν_2	Querkontraktionszahlen	–	99

Symbol	Beschreibung	Gl.	Seite
ξ	Flächenkoordinate	–	8
ρ	Dichte in der RKF	9.76	103
σ_I, σ_{II}	2. PK Hauptmembrankräfte in Voigt Notation	–	37
σ_1, σ_2	2. PK Normalmembrankräfte in Voigt Notation	9.50	98
τ	2. PK Schubmembrankraft in Voigt Notation	9.50	98
$\hat{\varphi}$	akkumulierte plastische Dehnung	9.84	104

Literaturverzeichnis

- [1] Basar Y, Krätzig W. (1985): Mechanik der Flächentragwerke Vieweg & Sohn Braunschweig Wiesbaden
- [2] Bathe K.-J. (1990): Finite – Elemente – Methode Springer Verlag Berlin Heidelberg New York
- [3] Bauer N. (1975): Zur Darstellung von Falten in Membranen mit Hilfe der Methode der finiten Elemente, SFB 64 Mitteilung 33/1975 Universität Stuttgart
- [4] Becker E, Bürger W. (1975): Kontinuumsmechanik, B. G. Teubner Stuttgart
- [5] Besdo D. (1980): Zur Formulierung von Stoffgesetzen für plastisch anisotrope/elastisch isotrope Medien im Dehnungsraum, Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik ZAMM Vol 60, pp. T101–T103.
- [6] Besseling J. F, van der Giessen E. (1994): Mathematical Modelling of inelastic Deformation, Chapman & Hall London
- [7] Bronstein I. N, Semendjajew K. A. (1989): Taschenbuch der Mathematik, 24. Auflage, Verlag Harri Deutsch Thun und Frankfurt/Main
- [8] Chiu H. C, Benson R. C, Fiscella M. D, Burns S. J. (1994): Mechanical and thermal wrinkling of polymer membranes, Journal of applied mechanics, Vol 61, pp. 67 – 70
- [9] Contri P, Schrefler B. A. (1988): A geometrically nonlinear finite element analysis of wrinkled membrane surfaces by a no-compression material model, Communications in applied numerical methods, Vol 4, pp. 5 – 15
- [10] Epstein M, Forcinito M. (2001): Anisotropic membrane wrinkling: theory and analysis, International Journal of Solids and Structures Vol 38, pp. 5253 – 5272
- [11] Haupt P. (1984): Intermediate configurations and the description of viscoelastic-plastic material behavior, Nuclear Engineering and Design Vol 79, pp. 289 – 300
- [12] Herbrich U. (2003): Faltenbildung in Membranen bei Temperaturänderung, Institut für Mechanik, TU Berlin, Studienarbeit

- [13] Hornig J, Schoop H. (2003): Closed form analysis of wrinkled membranes with linear stress – strain relation, *Computational Mechanics* Vol 30 Number 4, pp. 259 – 264
- [14] Jenkins C. H. (1996): Nonlinear dynamic response of membranes: state of the art – update, *Appl Mech Rev* Vol 48, Number 10, part 2, pp S41 – S48
- [15] Katsikadelis J. T, Nerantzaki M. S, Tsiatas G. C. (2001): The analog equation method for large deflection analysis of membranes. A boundary – only solution, *Computational Mechanics* Vol 27, pp 513 – 523
- [16] Krawietz A. (1986): *Materialtheorie*, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo
- [17] Liu X, Jenkins C. H, Schur W. W. (2000): fine scale analysis of wrinkled membranes, *International journal of computational engineering science* Vol 1, Number 2, pp 281 – 298
- [18] Lu K, Accorsi M, Leonard J. (2001): Finite element analysis of membrane wrinkling, *International Journal for numerical methods in engineering* Vol 50, pp. 1017–1038.
- [19] Lübcke E. (1992): *Zur Beschreibung von Falten in Membranen mittels nichtlinearer finiter Plattenelemente*, TU Berlin, Dissertation
- [20] Macwean D. B. (1968): Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannungs- und Verzerrungstensoren, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* Vol 19, pp. 157 – 185
- [21] Malvern L. (1969): *Introduction to the Mechanics of a continuous medium*, Prentice – Hall Inc. Englewood Cliffs N.J
- [22] Mansfield E. H. (1970): Load transfer via a wrinkled membrane, *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 316, pp. 269 – 289
- [23] Miller R. K, Hedgepeth J. M. (1982): An algorithm for finite element analysis of partly wrinkled membrane, *AIAA Journal* Vol 20, pp. 1761 – 1763
- [24] Miller R. K, Hedgepeth J. M, Weingarten V. I, Das P, Kahay S. (1985): Finite element analysis of partly wrinkled membranes, *Computers & Structures* Vol 20 Number 1 – 3, pp. 631 – 639
- [25] Oelbermann (1982): *Trag- und Verformungsverhalten plastisch geformter Metall – Membrankonstruktionen*, Verlagsgesellschaft Rudolf Müller Köln – Braunsfeld
- [26] Otto F, Trostel R. (1962): *Zugbeanspruchte Konstruktionen*, Ullstein Fachverlag Frankfurt Berlin

- [27] Pipkin A. C. (1986): The relaxed energy density for isotropic elastic membranes, IMA journal of applied mathematics Vol 36, pp. 85 – 99.
- [28] Press W. H, Teukolsky S. A, Vetterling W. T, Flannery B. P (1992): Numerical recipes in Fortran 77, Cambridge University press
- [29] Reissner E. (1938): On Tension field theory, Proceedings of the 5th International Congress on Applied Mechanics 5, pp. 88 – 92
- [30] Roddeman D. (1987): The Wrinkling of Thin Membranes: Part I – Theory, Journal of Applied Mechanics Vol 54, pp. 884 – 887
- [31] Roddeman D. (1991): Finite element analysis of wrinkling membranes, Communications in applied numerical methods Vol 7, pp. 299 – 307
- [32] Schade H. (1997): Tensoranalysis, Walter de Gruyter Berlin
- [33] Schoop H. (1984): Statik räumlicher Membranen vom Schnittmuster ausgehend. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik ZAMM Vol 64, pp. T312 – T314
- [34] Schoop H, Taenzer L, Hornig J. (2001): Wrinkling of anisotropic membranes with the Roddeman model, Festschrift Herbert Sander CD zum 75. Geburtstag von Univ. Prof. Dr.-Ing. H. Sander, Kleinschrodt K-D. (ed) TU Berlin Institut für Mechanik
- [35] Schoop H, Taenzer L, Hornig J. (2002): Wrinkling of nonlinear membranes, Computational Mechanics Vol 29, Number 1, pp. 68 – 74
- [36] Schweizerhof K. (1989): Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik, Schriftenreihe Heft 9, Institut für Baustatik Universität Karlsruhe
- [37] Seokwoo K, Seyoung I. (1997): Finite Element Analysis of Wrinkling Membranes, Journal of Applied Mechanics Vol 64, pp. 263 – 269
- [38] Stanuszek M. (2003): FE analysis of large deformation of membranes with wrinkling, Finite element in analysis and design Vol 39, pp. 599 – 618
- [39] Taenzer L. (1997): Strukturdynamische Modellierung und statische Berechnung von Segelkonstruktionen. Shaker-Verlag Aachen, Dissertation
- [40] Tietze P. (1986): Finite-Elemente Anwendungen eines isotropen, elastisch-plastischen Stoffgesetzes im Dehnungsraum, VDI-Fortschritt-Berichte Reihe 18, Nr. 30 Düsseldorf VDI-Verlag

- [41] Verhoeven H. (1993): Geometrisch und physikalisch nichtlineare finite Plattenelemente mit Berücksichtigung der Dickenverzerrung, Verlag Shaker Aachen, Dissertation
- [42] Wagner H. (1929): Ebene Blechwandträger mit dünnem Stegblech, Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, Heft 8 bis 12, 20. Jahrgang
- [43] Wiedemann B. (2002): Modelle für vorgespannte Membranen mit Faltenbildung, Bericht Nr. 2002 – 93, Institut für Statik TU Braunschweig
- [44] Wriggers P. (2001): Nichtlineare Finite – Elemente – Methode, Springer Verlag Berlin Heidelberg New York
- [45] Wu C.-H. (1978): Nonlinear wrinkling of nonlinear membranes of revolution, Journal of Applied Mechanics Vol 45, pp. 533 – 538
- [46] Ziegler R, Wagner W, Bletzinger K. – U (2000): A multisurface concept for the finite – element analysis of wrinkled membranes, Proceedings of the 4th International colloquium on computation of shell & spatial structures, IASS – IACM
- [47] Ziegler R. (2001): Theorie und Numerik für den Entwurf von vorgespannten Membrantragwerken, Institut für Baustatik Universität Karlsruhe, Dissertation
- [48] Zienkiewicz O. C. (1975): Methode der finite Elemente, Carl Hanser Verlag München Wien